6. Übungsblatt

Abgabe: Die, 5.12.06 vor der Vorlesung in das Fach von Andrea Wiese

Aufgabe 1 Es sind n paarweise disjunkte Mengen S_i gegeben. Die erste habe a_1 Elemente, die zweite a_2 usw. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Mengen, die höchstens ein Element aus jedem S_i enthalten, gleich $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$ ist. Wenden Sie das Ergebnis auf folgendes zahlentheoretisches Problem an: Sei $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots$ die Primzahlzerlegung von n. Dann hat n genau

$$t(n) = \prod (a_i + 1)$$

Teiler.
Folgern Sie daraus, daß n genau dann eine Quadratzahl ist, wenn $t(n)$ ungerade ist.

Aufgabe 2 (a) Beweisen Sie:

$$\binom{n+1}{a+b+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a} \binom{n-k}{b}$$

(b) Die *Bellzahl* B_n ist die Anzahl aller Partitionen einer n-elementigen Menge in nicht-leere Teilmengen, also $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. Geben Sie einen Beweis der folgenden Identität

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Aufgabe 3 Sei S die Menge aller k-Tupel $A = (A_1, \ldots, A_k)$ mit $A_1, \ldots, A_k \subseteq [n]$. Bestimmen Sie

$$\sum_{A \in S} |A_1 \cup \ldots \cup A_k|.$$

Aufgabe 4 Seien $n \geq 1, k \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe einer Bijektion, daß die Anzahl der Folgen $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $0 \leq a_i \leq n - i,\ 1 \leq i \leq n$, mit genau k Nulleinträgen gleich der vorzeichenlosen Stirlingzahl erster Art $c(n,k)$ ist.