Lineare Algebraische Gruppen *WS 2007*
Barbara Baumeister

4. Übungsblatt

Abgabe: Mo, 26.11.07

Aufgabe 1 Zeigen Sie Korollar (2.3.12): Für $k = \overline{k}$ sind J und V Bijektionen zwischen den folgenden Mengen:

(i) $\{X \subseteq k^n \mid X$ affin algebraisch $\}$ und $\{a \trianglelefteq k[T] \mid a = \sqrt{a}\}$.

(ii) $\{X \subseteq k^n \mid X$ affin algebraisch und irreduzibel $\}$ und $\{a \trianglelefteq k[T] \mid a$ ist ein Primideal $\}$.

(iii) $\{\{x\} \mid x \in k^n\}$ und $\{a \trianglelefteq k[T] \mid a$ ist ein maximales Ideal$\} = \{m_x \mid x \in k^n\}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die irreduziblen Komponenten eines topologischen Raums T eindeutig sind:
Angenommen

$$T = \cup_i^n V_i = \cup_j^m W_j,$$

wobei die V_i und W_j irreduzible Komponenten sind und wobei $V_i \not\subseteq V_j$ und $W_i \not\subseteq W_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $n = m$ und $V_i = W_j$ für eine geeignete Nummerierung.

Aufgabe 3 Sei $a = (T_2^2 - T_1^3)$. Bestimmen Sie $V(a)$ und die irreduziblen Komponenten von $V(a)$.

Aufgabe 4 Sei $a = (T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3) \subseteq k[T_1, T_2, T_3]$.

(i) Finde $V(a)$.

(ii) Ist $V(a)$ irreduzibel?

(iii) Gilt $a = J(V(a))$?

(iv) Zeigen Sie, dass a nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.