3. Übungsblatt

Abgabe: Mo, 12.11.07

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Abbildung V:

(i) Falls $a \subseteq b$, dann gilt $V(b) \subseteq V(a)$.

(ii) $V(a \cap b) = V(a) \cup V(b)$.

(iii) $V(\sum_{i \in I} a_i) = \cap_{i \in I} V(a_i)$.

Aufgabe 2 Geben Sie eine Parameterdarstellung der Kurve $T_2^2 = T_1^3$ an.

Aufgabe 3 Sei U ein affiner Unterraum der Dimension d von k^n, k ein Körper.

(i) Zeigen Sie, dass es lineare Polyonome $L_1, \ldots, L_{n-d}$ in $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$ gibt, so dass $U = V(L_1, \ldots, L_{n-d})$ gilt.

(ii) Zeigen Sie

$$J(U) = (L_1, \ldots, L_{n-d}).$$

Aufgabe 4 Sei k ein Körper und $f, g \in k[T_1, T_2]$ irreduzibel so, dass ein Polynom nicht das Vielfache von dem anderen ist. Zeigen Sie, dass $V(f, g)$ endlich ist.
Hinweis: Schreiben Sie $K = k(T_1)$. Zeigen Sie, dass f und g keine gemeinsamen Faktoren in $K[T_2]$ haben. Folgern Sie, dass es p, q in $K[T_2]$ gibt so, dass $pf + qg = 1$. Folgern Sie daraus, dass es ein h in $k[T_1]$ und a, b in $k[T_1, T_2]$ gibt so, dass $h = af + bg$. Folgern Sie wiederum daraus, dass es höchstens endlich viele T_1-Koordinaten für Punkte in $V(f, g)$ gibt.