3. Übung Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mo, 9.5.05

(1) Beweisen Sie:
Sei $n \in \mathbf{N}$. Dann ist die modulo n Relation auf $\mathbf{Z}$
$a \sim b$ genau dann, wenn n teilt $b - a$
eine Äquivalenzrelation.
Die Menge $\{0, \ldots, n-1\}$ enthält einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse.

(2) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, X_1, X_2 Teilmengen von A und Y_1, Y_2 Teilmengen von B. Zeigen Sie:

(a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(b) $f^-(Y_1 \cup Y_2) = f^-(Y_1) \cup f^-(Y_2)$

(c) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

(d) $f^-(Y_1 \cap Y_2) = f^-(Y_1) \cap f^-(Y_2)$

(3) Sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung von M nach M. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

f ist injektiv

f ist surjektiv

f ist bijektiv.

(4) Die Abbildungen $f_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ i = 1, 2$ seien wie folgt definiert:

$$f_1(n) = 3n + 2$$

$$f_2(n) = \begin{array}{ll} n + 1, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ n - 1, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{array}$$

Untersuchen Sie, ob es Abbildungen $g_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ mit $g_i \circ f_i = id$ oder $h_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ mit $f_i \circ h_i = id$ gibt. Folgern Sie, ob die f_i injektiv bzw. surjektiv sind ($i = 1, 2$).