12. Übung: Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mi, 13.7.05

(1) Seien V und W K-Vektorräume, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren aus W, d.h. $w_j \in W$ für $1 \leq j \leq n$. Dann gibt es genau ein $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(b_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$.

(2) Gegeben sind die linearen Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ und $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ durch
$f((x, y, z)) := (-x + z, y + z, x + y)$ bzw.
$g((x, y, z)) := (2x, y - z)$.
Bestimmen Sie die zu f und g gehörigen Matrizen $M_B^B(f)$ und $M_C^B(g)$ bezüglich der kanonischen Basen B und C von $\mathbf{R}^3$ bzw. $\mathbf{R}^2$. Berechnen Sie die Matrix $P := M_C^B(g) M_B^B(f)$ und verifizieren Sie, dass P die zur Abbildung $g \circ f$ gehörige Matrix ist.

(3) Bestimmen Sie zuerst die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems und geben Sie dann den Lösungsraums des linearen Gleichungssystems an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(4) (a) Berechnen Sie AB, BA, AC, CA CB und BC (falls möglich).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie zu den gegebenen Matrizen die Inversen (falls möglich).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$