Prof. Dr. B. Baumeister
Dipl.-Math. Peter Knorr

WS 2009/10

Mathematatik für Informatiker I - Übungsblatt 11

Abgabe bis Montag, den 11. Januar 2010
in die Briefkästen im Mathe-Foyer

Allgemeiner Hinweis: Die gefundenen Lösungen sind stets zu begründen, und das heißt: zu beweisen. Einzige Ausnahme: Die Aufgabenstellung verlangt etwas anderes!

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben sind folgende Mengen von Vektoren über $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\1\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\7\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Welche dieser Systeme sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^n$? Welche sind Basen von $\mathbb{R}^n$?

Bitte wenden!

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{K}^n$?

$A = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i = a, 1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{K}\}$

$B = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$

$C = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid \ a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n\}, n \geq 2.$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die Menge aller Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ mit $a_0 \ldots a_5 \in \mathbb{R}$ heiße V. V ist ein $\mathbb{R}$-linearer Vektorraum (muss nicht bewiesen werden).

Weisen Sie nach, dass die folgenden Polynome eine Basis von V bilden:

$1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + 3x + x^3, 3 + 2x^5, -1 - 3x^4 + 2x^5$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei H eine $\mathbb{K}$-Matrix und $\mathscr{L}_H$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $K\vec{x} = \vec{0}$. Weisen Sie nach, dass $\mathscr{L}_H$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte*)

Man betrachte das lineare Gleichungssystem mit $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 1 & 4 & 0 & c \end{array}\right)$$

(i) Welche Lösungsmenge hat das *homogene* Gleichungssystem?

(ii) Für welche Menge Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem lösbar?

(iii) Auf $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$\vec{x} \sim \vec{y} :\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

eine Äquivalenzrelation definiert (muss nicht bewiesen werden).
Welche Gestalt haben die Äquivalenzklassen von $\sim$? Geben Sie ein Repräsentantensystem an!

Zusatzaufgabe 6: (3 Punkte*)

Sei V ein Vektorraum, U_1, U_2 Untervektorräume von V. Beweisen Sie:

(i) $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum von V.
(ii) $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.