

**Satz III.8.2** *Unter den obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen ist die Lösung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems (III.50), wenn es eindeutig lösbar ist,*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi) d\xi. \quad (\text{III.55})$$

$G$  heißt die *Greensche Funktion* des Randwertproblems (III.50). Man bestätigt leicht folgende Eigenschaften von  $G$ :

**Satz III.8.3** *Für die Greensche Funktion  $G: Q := [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eines Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems gilt:*

- (a)  $G$  ist symmetrisch, d.h.  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ ;
- (b)  $G$  ist stetig;
- (c)  $G$  ist zweimal stetig differenzierbar auf  $Q \setminus \{(x, \xi): x = \xi\}$ ;
- (d) beim Überschreiten der Diagonalen macht die partielle Ableitung  $D_1G = \partial G/\partial x$  einen Sprung:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} D_1G(x+h, x) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} D_1G(x-h, x) = \frac{1}{p(x)}.$$

Die entscheidende Bedeutung von Satz III.8.2 liegt darin, dass er die Lösung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems – vorausgesetzt, sie ist eindeutig – explizit durch den Integraloperator aus (III.55) angibt. Hier kann man mit Methoden der Funktionalanalysis weitere Konsequenzen ziehen; wir kommen in Abschnitt V.7 darauf zurück.

## III.9 Aufgaben

**Aufgabe III.9.1** Sei  $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  eine autonome Differentialgleichung mit Lösung  $y(t) = \sin t$ . Zeige, dass auch  $\cos t$  eine Lösung ist.

**Aufgabe III.9.2** Zeige direkt (d.h., ohne Satz III.1.9 zu benutzen), dass die Funktionen  $y(t) = 1/(c-t)$  bzw.  $y = 0$  die einzigen Lösungen der Differentialgleichung  $y' = y^2$  auf einem Intervall sind.

**Aufgabe III.9.3** Löse die folgenden Differentialgleichungen und gib an, in welchem Bereich die Lösungen definiert sind.

- (a)  $y' = y \cdot \sin t$
- (b)  $y' = e^y$
- (c)  $y' = \frac{t^2}{y^2}$

**Aufgabe III.9.4** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = e^y \sin t, \quad y(0) = y_0.$$

Für welche Anfangswerte  $y_0$  existiert die Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$ ? Für welche Anfangswerte  $y_0$  ist die Lösung beschränkt?

**Aufgabe III.9.5** Es seien  $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, und die Differentialgleichungen  $y'_i = f_i(t, y_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mögen im Intervall  $[a, b]$  mit den Anfangswerten  $y_1(a) \leq y_2(a)$  lösbar sein. Außerdem soll  $f_1(t, u) < f_2(t, u)$  für alle  $(t, u) \in \mathbb{R}^2$  gelten. Zeige, dass

$$y_1(t) \leq y_2(t)$$

für alle  $t \in [a, b]$ . Gilt das auch, wenn nur  $f_1(t, u) \leq f_2(t, u)$  für alle  $(t, u) \in \mathbb{R}^2$  vorausgesetzt ist?

**Aufgabe III.9.6** Ist in Satz III.1.9  $y_0$  kein innerer Punkt von  $J$ , braucht Teil (a) dieses Satzes nicht zu gelten. Zeige das mit Hilfe des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{-t}{\sqrt{y} + 1}, \quad y(0) = 0.$$

**Aufgabe III.9.7** Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Es möge eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung der autonomen Differentialgleichung  $y' = g(y)$  mit Anfangswert  $y(0) > 0$  existieren. Zeige: Für jedes  $\alpha > 1$  ist

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{g(y)}{y^\alpha} \right| = 0.$$

Zur Erinnerung: Für  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{\xi > x} \varphi(\xi).$$

Damit die Gleichung  $y' = g(y)$  eine globale Lösung besitzt, darf  $g$  also nicht „überall“ stärker als linear anwachsen.

**Aufgabe III.9.8** Löse folgende Differentialgleichungen:

- (a)  $y' = \frac{y}{t^2 - 1}$
- (b)  $y' = \frac{y^2 - t^2}{2yt}$
- (c)  $y' = (t - y + 3)^2$

**Aufgabe III.9.9** Angenommen, man kennt eine Lösung  $y_1$  der linearen Differentialgleichung

$$y'' + \alpha(t) \cdot y' + \beta(t) \cdot y = 0.$$

Dann liefert der Ansatz  $y_2(t) = c(t) \cdot y_1(t)$  eine mit den bekannten Methoden lösbare Differentialgleichung für eine weitere Lösung  $y_2$ . Führe das aus und bestimme damit noch eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0,$$

wobei  $y_1(t) = c \cdot e^{-pt}$  (vergleiche Beispiel III.1.8).

**Aufgabe III.9.10** Durch eine geeignete Transformation  $u = u(t)$  können die Differentialgleichungen des folgenden Typs auf Gleichungen mit getrennten Veränderlichen zurückgeführt werden:

- (a)  $y' = \varphi(\alpha t + \beta y + \gamma)$ ,  
 (b)  $y' = \varphi(y/t)$ ; diese Gleichung wird auch *homogene Differentialgleichung* genannt, was nicht mit den homogenen linearen Differentialgleichungen verwechselt werden darf.

Finde eine solche Transformation.

**Aufgabe III.9.11** Finde eine geeignete Substitution, die die *Bernoullische Differentialgleichung*

$$y' = \alpha(t) \cdot y + \beta(t) \cdot y^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

in eine lineare Differentialgleichung transformiert. Löse dann

$$y' - y + ty^2 = 0.$$

**Aufgabe III.9.12** Der Satz von Picard-Lindelöf erlaubt es, die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  iterativ zu bestimmen. Die Folge  $\varphi_0, T\varphi_0, T^2\varphi_0, \dots$ , wo  $\varphi_0$  die Funktion  $t \mapsto y_0$  bezeichnet und  $T$  wie in (III.9) definiert ist, konvergiert nämlich auf jedem hinreichend kleinen Intervall um  $t_0$  gleichmäßig gegen die Lösung. Man berechne diese Folge von Funktionen für das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

**Aufgabe III.9.13** Beweise Satz III.2.5.

**Aufgabe III.9.14** Gegeben seien ein Intervall  $I = [0, \alpha]$ , eine stetige Funktion  $K: I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Abschätzung

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq e^{-t} |z_1 - z_2| \quad \forall x, t \in I, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

genügt, und eine stetige Funktion  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige, dass es genau ein  $y \in C(I)$  gibt mit

$$y(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t, y(t)) dt \quad \forall x \in I.$$

**Aufgabe III.9.15** Noch ein Fixpunktsatz: Es sei  $B$  ein normierter Raum,  $D \subset B$  abgeschlossen und  $T: D \rightarrow B$  eine stetige Abbildung. Die Gleichung

$$Tx = x \tag{III.56}$$

heißt *approximativ lösbar in  $D$* , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $x_\varepsilon \in D$  mit  $\|Tx_\varepsilon - x_\varepsilon\| < \varepsilon$  gibt. Zeige: Falls (III.56) approximativ lösbar und  $T(D)$  kompakt ist, gibt es ein  $x \in D$  mit  $Tx = x$ .

**Aufgabe III.9.16** Es sei  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig und periodisch, es gibt also ein  $p \in \mathbb{R}$ , so dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $A(t+p) = A(t)$  gilt. Weiter sei  $Y$  eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

Zeige:

- (a) Für jedes ganzzahlige
- $k$
- ist die Abbildung

$$Y_k: t \mapsto Y(t + kp)$$

ebenfalls eine Fundamentalmatrix.

- (b) Es gibt eine Matrix
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- , so dass

$$Y_k = YB^k$$

für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ .

- (c) Ist
- $\lambda$
- ein Eigenwert dieser Matrix
- $B$
- , so existiert eine Lösung
- $y$
- unserer Differentialgleichung mit

$$y(t + p) = \lambda y(t)$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ .**Aufgabe III.9.17** Gegeben sei ein System linearer Differentialgleichungen

$$y' = A(t)y. \quad (\text{III.57})$$

Das System

$$z' = -A^T(t)z \quad (\text{III.58})$$

heißt das zu (III.57) adjungierte System ( $A^T$  ist die transponierte Matrix).

- (a)  $Y$  ist eine Fundamentalmatrix von (III.57) genau dann, wenn  $Y^{T^{-1}}$  eine Fundamentalmatrix von (III.58) ist.
- (b) Das System (III.57) hat eine orthogonale Fundamentalmatrix genau dann, wenn  $A^T = -A$  ist.
- (c) Betrachte nun die inhomogenen Gleichungen  $y' = A(t)y + f(t)$  und  $z' = -A^T(t)z - g(t)$  mit Lösungen  $y$  bzw.  $z$  auf  $[a, b]$ . Zeige, dass für  $t \in [a, b]$  gilt

$$\int_a^t (\langle f(s), z(s) \rangle - \langle y(s), g(s) \rangle) ds = \langle y(t), z(t) \rangle - \langle y(a), z(a) \rangle.$$

**Aufgabe III.9.18** Sei  $W$  die Wronskideterminante einer Fundamentalmatrix des homogenen linearen Systems  $y' = A(t)y$ .

- (a)
- $W$
- erfüllt die Differentialgleichung

$$W' = \text{tr } A(t) \cdot W,$$

wobei  $\text{tr}$  die Spur einer Matrix bezeichnet; d.h.  $\text{tr } B = \sum_{j=1}^n b_{jj}$ .

- (b) Folglich gilt

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds\right).$$

**Aufgabe III.9.19** (D'Alembertsches Reduktionsverfahren)

Gegeben sei ein zweidimensionales lineares Differentialgleichungssystem  $y' = A(t)y$ , wo die  $A(t)$  also  $2 \times 2$ -Matrizen sind. Sei  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine von der Nulllösung verschiedene Lösung; wir nehmen an, dass die 1. Komponente  $y_1$  von  $y$  nicht den Wert 0 annimmt. Um eine zweite von  $y$  linear unabhängige Lösung  $z$  zu finden, mache den Ansatz

$$z(t) = \varphi(t)y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

mit reellwertigen Funktionen  $\varphi$  und  $w_2$ .

- (a) Setze  $z$  in das System ein und finde Bedingungen an  $\varphi$  und  $w_2$ , damit  $z$  eine Lösung ist. Auf diese Weise erhält man

$$w_2(t) = c_1 \exp \int_{t_0}^t \left( a_{22}(s) - a_{12}(s) \frac{y_2(s)}{y_1(s)} \right) ds,$$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{a_{12}(s)w_2(s)}{y_1(s)} ds + c_2.$$

- (b) Zeige, dass  $y$  und  $z$  wirklich linear unabhängig sind.  
 (c) Modifiziere das Verfahren im Fall, dass  $y_2$  den Wert 0 nicht annimmt. Können  $y_1$  und  $y_2$  eine gemeinsame Nullstelle haben?

**Aufgabe III.9.20** Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t-1} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Durch den Ansatz von  $y$  als Polynom bestimme eine Lösung der Differentialgleichung.  
 (b) Bestimme eine zweite Lösung mit dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren (Aufgabe III.9.19).  
 (c) Löse das Anfangswertproblem.

**Aufgabe III.9.21** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t-1} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -(t-1)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Ein Fundamentalsystem des homogenen Systems war in Aufgabe III.9.20 zu bestimmen.)

**Aufgabe III.9.22** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe III.9.23** Es sei  $A$  eine quadratische Matrix. Berechne  $e^A$  in folgenden Situationen:

- (a)  $A^2 = \alpha \cdot A$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $A$  ist eine Diagonalmatrix oder allgemeiner eine Blockmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

wobei  $A_1, \dots, A_r$  quadratische Matrizen sind.

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe III.9.24** Finde  $2 \times 2$ -Matrizen  $A$  und  $B$  mit  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ .

**Aufgabe III.9.25** Zwei identische mathematische Pendel sind so nebeneinander aufgestellt, dass sie in derselben Ebene schwingen. Die Pendelmassen sind durch eine Feder verbunden, deren Ruhelänge gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte ist. Bestimme die Bewegungsgleichung der Pendelmassen für kleine Auslenkungen. Diskutiere verschiedene Anfangswerte. Skizziere die Auslenkung, wenn die Federkonstante klein ist.

**Aufgabe III.9.26** Löse folgende Differentialgleichungen:

- (a)  $y_1' - 4y_1 - y_2 = 0$   
 $y_2' - y_2 + 2y_1 = -2e^t$
- (b)  $y_1' = y_1 + 6y_2 + 3y_3$   
 $y_2' = -2y_1 - 6y_2 - 2y_3$   
 $y_3' = y_1 + 2y_2 - y_3$

**Aufgabe III.9.27** Betrachte die Differentialgleichung

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0, \quad (\text{III.59})$$

wo  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ .

- (a) Zeige: Ist  $y$  eine Lösung dieser Differentialgleichung auf  $(0, \infty)$ , so löst  $u: t \mapsto y(e^t)$  auf  $\mathbb{R}$  eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (nämlich welche?). Ist umgekehrt  $u$  eine Lösung letzterer Differentialgleichung, so löst  $y: t \mapsto u(\log t)$  die Gleichung (III.59) auf  $(0, \infty)$ .
- (b) Löse die Differentialgleichung

$$t^4 y^{(4)} + 3t^2 y'' - 7ty' + 8y = 0$$

auf  $(0, \infty)$ .

**Aufgabe III.9.28** Führe das d'Alembertsche Reduktionsverfahren (Aufgabe III.9.19) für das der Gleichung 2. Ordnung

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (\text{III.60})$$

entsprechende System durch, um ausgehend von einer Lösung von (III.60) eine zweite dazu linear unabhängige Lösung zu finden.

**Aufgabe III.9.29** Sei  $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$  das der Gleichung  $n$ -ter Ordnung (III.18) entsprechende System und  $W$  die Wronskideterminante einer Fundamentalmatrix. Zeige mit Aufgabe III.9.18

- (a)  $W' = -a_{n-1}(t)W$ ,  
 (b)  $W(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds\right)W(t_0)$ .

**Aufgabe III.9.30**

- (a) Bestimme ein Fundamentalsystem für die Gleichung

$$y'' - \cos t y' + \sin t y = 0.$$

[Tipp: Eine Lösung kann man mit dem Ansatz  $e^\varphi$  gewinnen, eine zweite mit dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren aus Aufgabe III.9.28.]

- (b) Löse anschließend das Anfangswertproblem

$$y'' - \cos t y' + \sin t y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

**Aufgabe III.9.31** Zwei Massen  $M_1$  und  $M_2$ , die mit einer masselosen Feder verbunden sind, bewegen sich reibungslos auf einer Geraden. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  seien die Massen in ihrer Ruhelage, die Feder sei entspannt, und die Geschwindigkeit von  $M_1$  bzw.  $M_2$  sei 0 bzw.  $v_2$ . Beschreibe die Bewegungsgleichung dieser Massen.

**Aufgabe III.9.32** Berechne die Sinkgeschwindigkeit eines Körpers im Meer, der auf der Wasseroberfläche losgelassen wird, als Funktion der Zeit und als (implizite) Funktion des Ortes. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit ( $R = r \cdot v$ ); außerdem wirkt ein konstanter Auftrieb  $A$ . (Die Differentialgleichung für  $v(x)$  ergibt sich aus der für  $v(t)$  mittels der Kettenregel.)

Wenn der Körper eine Tonne mit radioaktivem Abfall ist, interessiert die Auftreffgeschwindigkeit auf dem Meeresboden. Berechne sie für eine 239 kg schwere 208 l-Tonne, die in eine Meerestiefe von 91 m versenkt wird. Der experimentell ermittelte Proportionalitätsfaktor  $c$  ist etwa  $0,12 \frac{\text{kg}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ ; 1 l Seewasser wiegt 1,025 kg. Die Tonne ist so gebaut, dass sie einen Aufprall mit  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  noch ohne großen Schaden übersteht.

**Aufgabe III.9.33** Jeder der beiden Tanks  $K_1, K_2$  enthalte 100 l Wasser, in dem 5 kg bzw. 2 kg Salz aufgelöst seien. Beginnend mit der Zeit  $t_0 = 0$  soll in  $K_1$  pro Minute 1 Liter einer Salzlösung der Konzentration 0,1 kg/Liter eingeleitet werden, ferner sollen 2 Liter/Minute von  $K_1$  nach  $K_2$ , 1 Liter/Minute von  $K_2$  nach  $K_1$  herübergepumpt und 1 Liter/Minute aus  $K_2$  in einen Abfluss geleitet werden. Wie groß ist der Salzgehalt  $m_i(t)$  in  $K_1$  zur Zeit  $t > 0$ ? Zeige, dass die Salzkonzentration in  $K_i$  gegen die Konzentration der eingeleiteten Lösung strebt.

**Aufgabe III.9.34** Untersuche den Gleichgewichtspunkt  $u_0 = 0$  der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_1 y_2^3 \\ y_2' &= -y_1^2 y_2^2 - y_2^3 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunov-Funktion  $E$ .

[Hinweis: Mache den Ansatz  $E(y) = ay_1^2 + by_2^2$ .]

**Aufgabe III.9.35** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und sei  $f(\bar{u}) = 0$ . Zeige: Der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}$  ist instabil, wenn es eine auf einer Umgebung  $U$  von  $\bar{u}$  definierte stetig differenzierbare Funktion  $E$  gibt mit

$$\langle \text{grad } E(u), f(u) \rangle \begin{cases} = 0, & \text{falls } u = \bar{u}, \\ > 0, & \text{falls } u \in U \setminus \{\bar{u}\}. \end{cases}$$

**Aufgabe III.9.36** Zeige, dass 0 ein instabiler Gleichgewichtspunkt der Lotka-Volterra-Gleichungen ist.

**Aufgabe III.9.37** Finde ein nichtlineares System  $y' = f(y)$ , für das 0 ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist, so dass für das linearisierte System  $y' = Df(0)y$  der Punkt 0 ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

**Aufgabe III.9.38** (Hamiltonsche Systeme)

In dieser Aufgabe schreiben wir die Koordinaten eines Punkts im  $\mathbb{R}^{2n}$  (bzw. die Koordinatenfunktionen einer  $\mathbb{R}^{2n}$ -wertigen Funktion) als  $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ . Sei  $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar; das Differentialgleichungssystem

$$p'_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q), \quad q'_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q) \quad (j = 1, \dots, n)$$

wird ein *Hamiltonsches System* und  $H$  eine *Hamiltonfunktion* genannt. (Viele in der Mechanik auftauchende Probleme haben diese Gestalt mit der Energie als Hamiltonfunktion.) Zeige, dass die Hamiltonfunktion ein erstes Integral eines Hamiltonschen Systems ist.

**Aufgabe III.9.39** Untersuche die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned} y'_1 &= -\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_1 y_2 \\ y'_2 &= \alpha_2 y_2 (1 - r y_2^4) - \beta_2 y_1 y_2 \end{aligned}$$

auf Stabilität. (Die auftauchenden Parameter sollen alle positiv sein.)

**Aufgabe III.9.40** Bestimme die Greensche Funktion des Randwertproblems  $y'' = g$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$ .

**Aufgabe III.9.41** Bestimme die Greensche Funktion des Randwertproblems  $(xy')' = g$ ,  $y(1) = y(e) = 0$ .

## III.10 Literaturhinweise

Einige einführende Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen:

- ▶ B. AULBACH: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Auflage, Spektrum-Verlag, 2004.
- ▶ G. BIRKHOFF, G.-C. ROTA: *Ordinary Differential Equations*. 3. Auflage, Wiley, 1978.



- ▶ W. E. BOYCE, R. C. DIPRIMA: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7. Auflage, Wiley, 2000.
- ▶ H. HEUSER: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 1989.
- ▶ J. H. HUBBARD, B. H. WEST: *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. Band 1 und 2. Springer, 1991 und 1995.
- ▶ R. E. O'MALLEY: *Thinking About Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press, 1997.
- ▶ W. WALTER: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 7. Auflage, Springer, 2000.

Die folgenden Texte betonen die geometrische Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen und sind teils etwas anspruchsvoller:

- ▶ H. AMANN: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 1983.
- ▶ V. I. ARNOLD: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Auflage, Springer, 2001.
- ▶ C. CHICONE: *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 1999.
- ▶ E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON: *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.
- ▶ M. W. HIRSCH, S. SMALE: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.