

Dirk Werner

Mathematik für Geowissenschaftler

Vorlesungsskript FU Berlin

Vorbemerkung

In dieser Vorlesung wird versucht, einige mathematische Methoden darzustellen, die in den Geowissenschaften möglicherweise von Bedeutung sind. Das Ziel ist dabei freilich nicht, mathematische Sätze in aller mathematischen Strenge zu beweisen. Vielmehr versuche ich, die Herangehensweise des englischen Kochs Jamie Oliver auf die Mathematik zu übertragen; in seinem Buch *The Naked Chef* schreibt er nämlich: “I still believe in the two things that resulted in my name of the Naked Chef: using the *bare* essentials of your larder and *stripping* down restaurant methods to the reality of home.”

Das vorliegende Skript beansprucht keinerlei Originalität; in der Tat sind viele Beispiele und Skizzen der existierenden Literatur, insbesondere den Texten von M. Precht, K. Voit und R. Kraft bzw. von P. Harmand, entnommen (siehe die Literaturhinweise).

Der erste Teil der Vorlesung, also *Mathematik für Geowissenschaftler I* im Wintersemester, umfasst in etwa die Kapitel I bis III.3 und der zweite Teil den Rest.

Für das L^AT_EX des ursprünglichen Manuskripts bin ich Simon Albroscheit zu großem Dank verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis

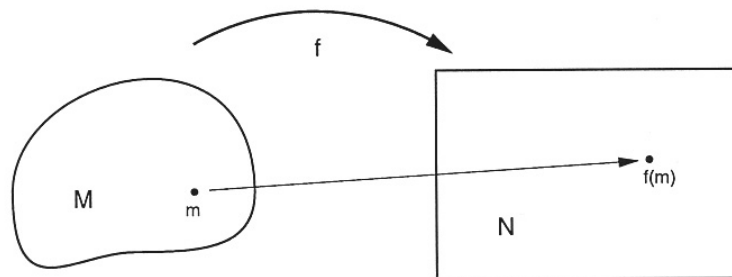
I Funktionen	1
I.1 Der Begriff der Funktion	1
I.2 Einige spezielle Funktionen	3
I.3 Koordinatentransformationen	11
II Differential- und Integralrechnung	15
II.1 Folgen und Grenzwerte	15
II.2 Unendliche Reihen	19
II.3 Die Ableitung einer Funktion	21
II.4 Anwendungen der Differentialrechnung	25
II.5 Integralrechnung	30
III Differentialgleichungen	41
III.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	41
III.2 Die logistische Differentialgleichung	43
III.3 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen	46
III.4 Komplexe Zahlen	50
III.5 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	53
III.6 Schwingungsgleichungen	56
III.7 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung	60
III.8 Ein Räuber-Beute-Modell	62
IV Lineare Gleichungssysteme	67
IV.1 Beispiele	67
IV.2 Vektoren und Matrizen	69
IV.3 Multiplikation von Matrizen	75
V Funktionen von mehreren Veränderlichen	81
V.1 Beispiele	81
V.2 Partielle Ableitungen	82
V.3 Skalarprodukt und Norm	84
V.4 Der Gradient	85
V.5 Anwendungen	87
V.6 Die Diffusionsgleichung	91
Literaturhinweise	97

Kapitel I

Funktionen

I.1 Der Begriff der Funktion

In der Mathematik versteht man unter einer *Funktion* f eine Abbildung zwischen zwei Mengen.



Es wird dabei jedem Element $x \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $y \in N$ zugeordnet. Dieses Element bezeichnet man mit $y = f(x)$. Eine Funktion besteht also aus drei Komponenten: dem Definitionsbereich M , dem Wertevorrat N und der Funktionsvorschrift $x \mapsto f(x)$ (lies: „ x geht über in $f(x)$ “). Formal schreiben wir

$$f: M \rightarrow N, \quad x \mapsto f(x) \quad (\text{lies: „zu } x \text{ wird } f(x) \text{ zugeordnet“}).$$

Hier ein Beispiel:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad (\text{oder: } f(x) = x^2)$$

Es ist nicht verlangt, dass jedes Element von N von der Funktion „getroffen“ wird; es darf auch vorkommen, dass verschiedene x -Werte denselben Funktionswert haben. Im obigen Beispiel der Quadratfunktion ist etwa $f(1) = f(-1)$, und für kein $x \in \mathbb{R}$ gilt zum Beispiel $f(x) = -3$.

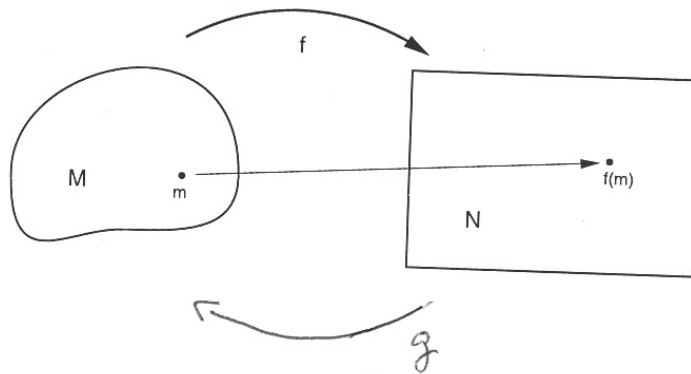
Tritt keiner dieser Defekte ein, nennt man die Funktion *umkehrbar* (oder *bijektiv*); zum Beispiel ist

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^2 \tag{I.1}$$

umkehrbar; \mathbb{R}^+ steht für $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

Dass eine Funktion $f: M \rightarrow N$ umkehrbar ist, kann man folgendermaßen in die Sprache der Gleichungen übersetzen: Für jedes $y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ exakt eine Lösung $x \in M$. Ist f umkehrbar, kann man aus $f(x)$ wieder eindeutig auf x schließen. Auf diese Weise gelangen wir zur *Umkehrfunktion*

$$g: N \rightarrow M, \quad f(x) \mapsto x.$$



Zum Beispiel ist die Umkehrfunktion der Funktion f aus (I.1) die Wurzelfunktion

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad y \mapsto \sqrt{y}.$$

Natürlich darf man auch

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

schreiben, da es auf den Namen der Variablen nicht ankommt.

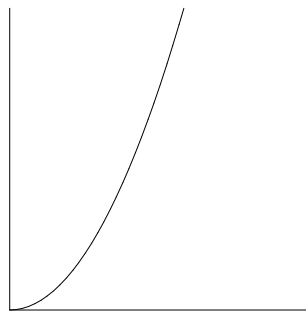
Wir werden (fast) nur Funktionen studieren, wo Definitionsbereich und Wertevorrat Intervalle sind („reelle Funktionen“). Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\} && \text{(halboffene Intervalle)} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\} && \end{aligned}$$

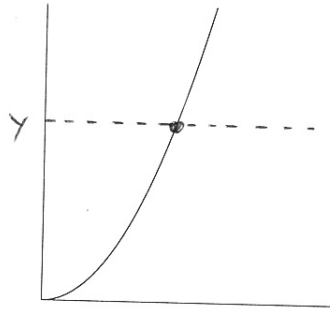
Der „offene“ Rand darf $+\infty$ oder $-\infty$ sein, zum Beispiel

$$\begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}: a < x\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}. \end{aligned}$$

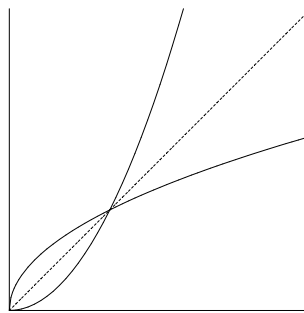
Man veranschaulicht sich reelle Funktionen durch ihre Graphen, zum Beispiel für die Funktion aus (I.1):



Dass f umkehrbar ist, erkennt man jetzt daran, dass zu jedem $y \in N (= \mathbb{R}^+)$ die horizontale Achse durch y den Graphen von f genau einmal schneidet:



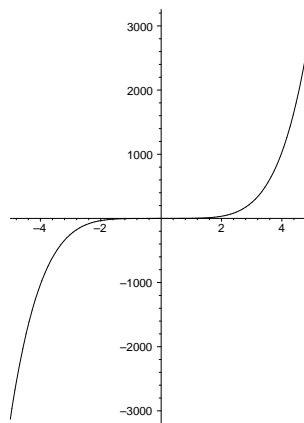
Man erhält daher (nicht nur in diesem Beispiel) den Graphen der Umkehrfunktion, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion an der Winkelhalbierenden spiegelt:



Achtung: Funktionen werden manchmal nur implizit, ohne explizite Formel, beschrieben. Zum Beispiel ist

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 + x$$

umkehrbar, aber für die Umkehrfunktion (die also einem $y \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x^5 + x = y$ zuordnet) gibt es keine Formel.



Graph von $y = x^5 + x$

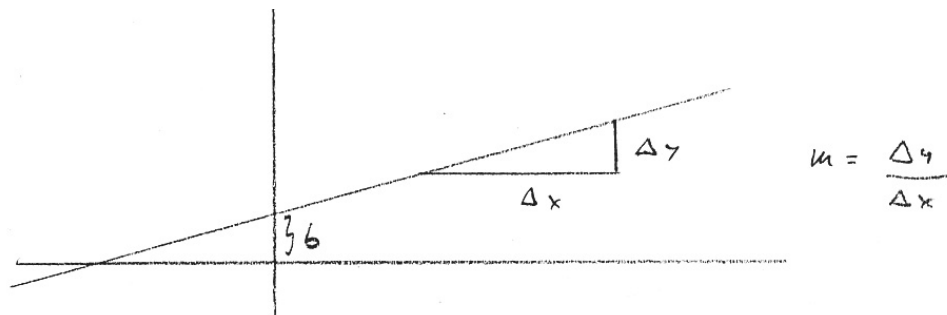
I.2 Einige spezielle Funktionen

I.2.1 Lineare Funktionen

Dies sind Funktionen der Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b$$

Hier gibt m die Steigung und b die Ordinatenabschnitt an:



Viele Aufgaben führen (zumindest in grober Näherung) auf lineare Funktionen; hier ein Beispiel. Für die Erdbevölkerung B im Jahr J finden Sie folgende Daten in Wikipedia:

$$J = 2010 : B = 6\,800\,000\,000$$

$$J = 2012 : B = 7\,100\,000\,000$$

Sie wollen daraus einen Schätzwert für das Jahr 2020 herleiten und machen dazu die Modellannahme, dass die Erdbevölkerung – zumindest in kurzer Zeitspanne – linear wächst¹:

$$B = mJ + b \quad (= f(J))$$

Gesucht ist nun $f(2020)$. Um die unbekannt Parameter m und b zu finden, setzen wir die bekannten Werte für 2010 und 2012 ein und erhalten folgende Gleichungen:

$$6\,800\,000\,000 = m \cdot 2010 + b$$

$$7\,100\,000\,000 = m \cdot 2012 + b,$$

die man jetzt nach m und b auflösen hat. Leider tauchen in den Gleichungen etwas unhandliche Zahlen auf; es ist daher praktischer, mit $x = J - 2010$ und $y = B/10^9$ zu rechnen. Das führt auf den Ansatz

$$y = m_1x + b_1 \quad (= f_1(x))$$

und die Gleichungen

$$6.8 = m_1 \cdot 0 + b_1$$

$$7.1 = m_1 \cdot 2 + b_1$$

mit den Lösungen $b_1 = 6.8$ und $m_1 = 0.15$. Daher erhält man den Schätzwert $f_1(10) = 0.15 \cdot 10 + 6.8 = 8.3$, d.h. einen Schätzwert von 8 300 000 000 Menschen im Jahr 2020.

1.2.2 Potenzfunktionen

Dies sind Funktionen mit der Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = a \cdot x^r.$$

Für nicht ganzzahlige Exponenten sind sie höchstens für $x \geq 0$ (im Fall $r > 0$) bzw. $x > 0$ (im Fall $r < 0$) erklärt; zur Erinnerung:

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad \text{und} \quad x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

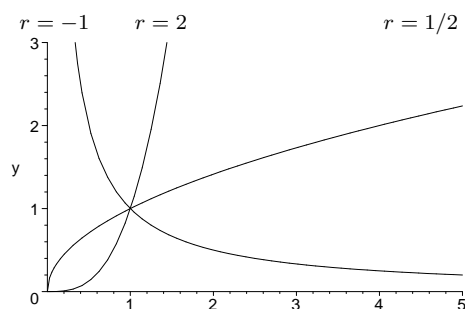
¹Für große Zeitspannen ist diese Annahme sicher nicht gerechtfertigt!

Potenzfunktionen treten auf, wenn eine Größe y einer gewissen Potenz x^r einer Größe x proportional ist: Lässt man einen Gegenstand fallen, ist die Fallstrecke s dem Quadrat der Fallzeit t proportional, also

$$s = at^2 \quad (\text{mit } a = \frac{g}{2}, \text{ der halben Erdbeschleunigung}).$$

Ein anderes Beispiel: Man findet einen Zusammenhang der Form $y = ax^r$ zwischen der Fläche x einer Insel und der Anzahl y der Vogelarten auf der Insel. **Achtung:** Im Prinzip kann y hier nur ganzzahlige Werte annehmen (y ist eine *diskrete* Variable); man fährt jedoch gut mit dem *kontinuierlichen* Modell $y = ax^r$, in dem y beliebige (positive) reelle Werte annehmen kann.

Hier einige Graphen für Funktionen $f(x) = x^r$:



Es gelten folgende Eigenschaften²:

$r > 0$: $x^r \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ (und zwar um so schneller, je größer r ist)

$r < 0$: $x^r \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$

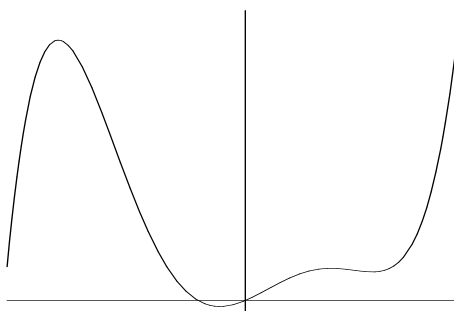
$x^r \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

I.2.3 Polynome

Das sind Funktionen der Bauart

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Hier ein typischer Graph:



Über den Detailverlauf des Graphen kann man mittels der Differentialrechnung Informationen gewinnen (Maxima, Minima, etc.). Hier bemerken wir, dass für „große“ Werte von $|x|$ der Verlauf des Graphen einzig von a_n bestimmt wird:

$$\begin{aligned} |x| \text{ „groß“} &\Rightarrow f(x) = x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &\Rightarrow f(x) = x^n \cdot (a_n + \text{„klein“} + \dots + \text{„klein“} + \text{„klein“}) \\ &\Rightarrow f(x) \approx a_n x^n \end{aligned}$$

²Auf Präzisierung kommen wir später zu sprechen.

Diese Überlegungen kann man mit dem Begriff des Grenzwerts, der auf S. 17 eingeführt wird, präzisieren. Speziell gilt:

$$\begin{aligned} a_n > 0 : f(x) &\rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty \\ a_n < 0 : f(x) &\rightarrow -\infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

I.2.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Wir betrachten Funktionen der Gestalt

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = c \cdot a^x$$

mit Parametern $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Solche Funktionen tauchen bei vielen Wachstums- oder Zerfallsprozessen auf, nämlich immer dann, wenn der Zuwachs bzw. die Abnahme der Größe $f(x)$ zu $f(x)$ proportional ist (mehr dazu in Kapitel III). Beispiele sind: Zellteilung, Ausbreitung von Infektionskrankheiten, radioaktiver Zerfall usw.

Die Variable x hat in solchen Anwendungen die Dimension einer Zeit; daher schreiben wir, wie in der Physik üblich, t statt x im nächsten Beispiel:

Ein Bioreaktor wird zur Zeit $t = 0$ mit m_0 Gramm Bakterien bestückt. Die Wachstumsrate beträgt stündlich $r = 0.15$ (d.h. 15%). Nach einer Stunde beträgt die Bakterienmasse also [in Gramm] $m_0(1+r)$, nach 2 Stunden $m_0(1+r)(1+r) = m_0(1+r)^2$, nach 3 Stunden $m_0(1+r)^2(1+r) = m_0(1+r)^3$, und allgemein nach einer Zeit t [in Stunden]

$$y(t) = m_0(1+r)^t.$$

Man sieht, dass der Zuwachs zwischen den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ gerade

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) - y(t) &= m_0(1+r)^{t+\Delta t} - m_0(1+r)^t \\ &= m_0(1+r)^t \cdot ((1+r)^{\Delta t} - 1) \\ &= y(t) \cdot ((1+r)^{\Delta t} - 1), \end{aligned}$$

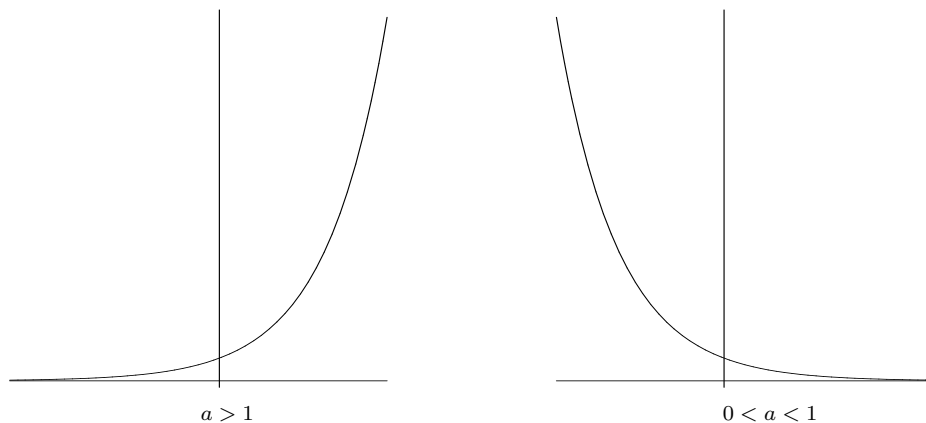
also proportional zu $y(t)$ ist.

Fragt man konkret nach der Masse nach 2 Stunden und 40 Minuten, so ist die Antwort

$$y\left(2\frac{2}{3}\right) = y\left(\frac{8}{3}\right) = m_0 \cdot 1.15^{8/3} = 1.45 \dots m_0,$$

also circa das 1.45-fache der Anfangsmasse.

Die Graphen der Funktionen $f(x) = a^x$ unterscheiden sich, je nachdem ob $a > 1$ oder $a < 1$ ist:

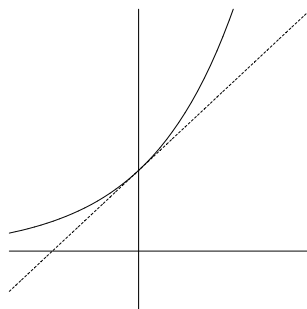


Es gilt:

$$\begin{aligned} a > 1 : a^x &\rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty \\ &a^x \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty \\ 0 < a < 1 : a^x &\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \\ &a^x \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Unter allen Funktionen der Bauart $f(x) = a^x$ ist eine besonders wichtig, nämlich die zur Basis $a = e = 2.71828\dots$. Dies ist die berühmte e -Funktion e^x . Was diese Funktion so speziell macht, werden wir in Kapitel II sehen, es ist nämlich die Ableitung von $f(x) = e^x$ wieder $f'(x) = e^x$.

Geometrisch können wir die e -Funktion unter allen Exponentialfunktionen a^x dadurch charakterisieren, dass ihr Graph die y -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet:

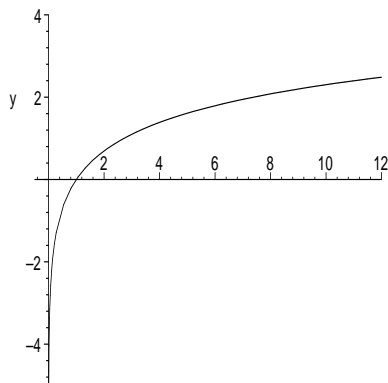


Die Zahl e kommt als Grenzwert bei der stetigen Verzinsung vor:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die e -Funktion ist als Funktion von \mathbb{R} nach $(0, \infty)$ umkehrbar, wie man am Graphen abliest. Die Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*:

$$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$$



Die \ln -Funktion ist also durch

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$

bestimmt.

Es sei an die Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen erinnert:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y & \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ a^{xy} &= (a^x)^y & \ln(x^y) &= y \cdot \ln x \\ \ln(e^x) &= x & e^{\ln x} &= x \end{aligned}$$

Es ist praktisch, die allgemeine Exponentialfunktion a^x mittels der e -Funktion auszudrücken. Dazu suchen wir eine Zahl λ , so dass

$$a^x = e^{\lambda x} \quad \text{für alle } x$$

gilt. Logarithmieren führt auf die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} \ln(a^x) &= \ln(e^{\lambda x}) \quad \text{für alle } x, \\ \text{d.h. } x \cdot \ln a &= \lambda x \quad \text{für alle } x, \\ \text{d.h. } \lambda &= \ln a. \end{aligned}$$

Die allgemeine Exponentialfunktion schreibt man daher als

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = c \cdot e^{\lambda x}.$$

In Anwendungen entspricht $\lambda > 0$ einem Wachstumsprozess und $\lambda < 0$ einem Zerfallsprozess.

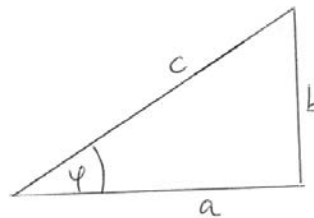
Es wurde bereits bemerkt, dass $f(x) = a^x$ für $a > 1$ mit $x \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst. Die Potenzfunktionen x^r tun das ebenfalls (für $r > 0$); aber eine Exponentialfunktion *wächst viel schneller* als jede Potenzfunktion. Die folgende Tabelle illustriert das. Zu Anfang liegt x^4 vorn, bei $x = 16$ ist Gleichstand, und dann überholt 2^x , und zwar rasant:

x	0	1	4	10	15	20	30
x^4	0	1	256	10 000	50 625	160 000	810 000
2^x	1	2	16	$1024 \approx 10^3$	32 768	$\approx (10^3)^2 = 10^6$	$\approx (10^3)^3 = 10^9$

Zeichnet man den Graphen von e^x mit der Einheit 1 cm, so ist $e^{10} \approx 220$ m, $e^{20} \approx 4850$ km und $e^{30} \approx 1.5 \cdot 10^8$ km (Entfernung Erde-Sonne).

I.2.5 Trigonometrische Funktionen

Dies sind die Funktionen sin, cos, tan, cot; sie sind als Funktion eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck folgendermaßen erklärt:

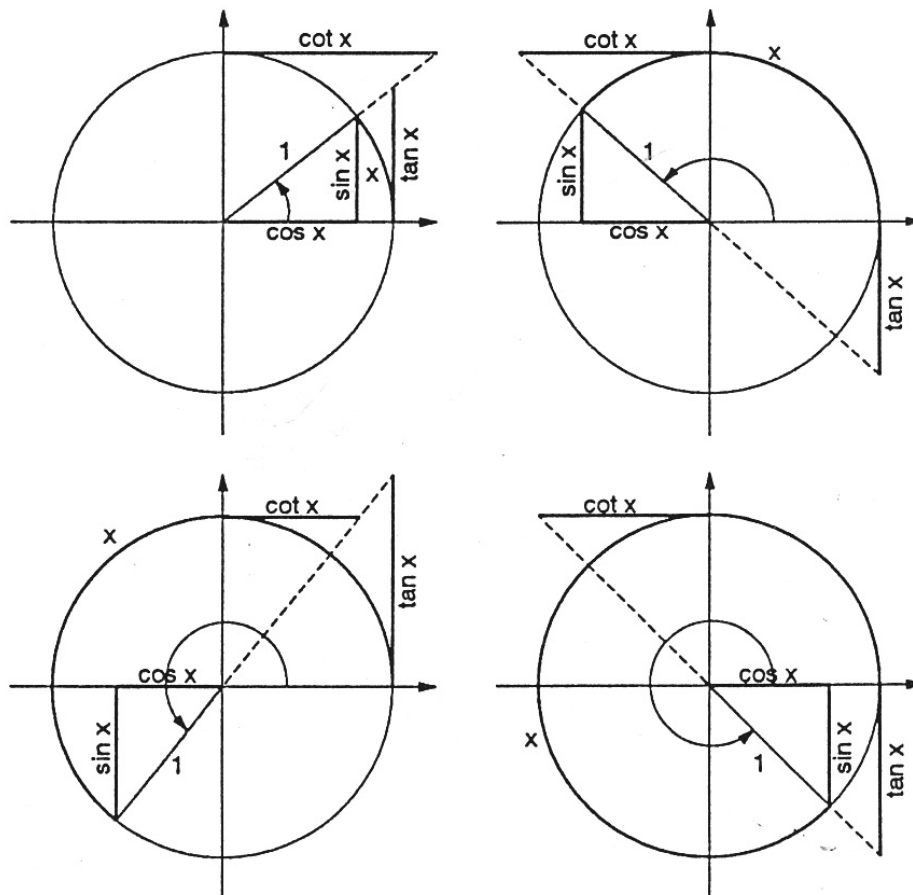


$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos \varphi &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan \varphi &= \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ \cot \varphi &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich unzählige Formeln wie

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \quad \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi}.$$

Zunächst ist der Winkel zwischen 0° und 90° zu nehmen. Durch eine Darstellung im Einheitskreis gelingt es jedoch, die Definition auf beliebige Winkel auszudehnen:



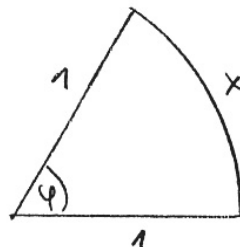
Sinus und Cosinus sind dann periodisch mit einer Periode von 360° :

$$\sin(\varphi + 360^\circ) = \sin \varphi, \quad \cos(\varphi + 360^\circ) = \cos \varphi,$$

und Tangens und Cotangens sind periodisch mit einer Periode von 180° :

$$\tan(\varphi + 180^\circ) = \tan \varphi, \quad \cot(\varphi + 180^\circ) = \cot \varphi.$$

Fast überall in den Naturwissenschaften wird ein Winkel nicht im *Gradmaß*, sondern im *Bogenmaß* gemessen. Als Maß für den Winkel wird dabei die Länge des Bogens genommen, den er aus einem Kreis vom Radius 1 ausschneidet:



Also gilt zum Beispiel

$$45^\circ \cong \frac{\pi}{4}, \quad 90^\circ \cong \frac{\pi}{2}, \quad 180^\circ \cong \pi, \quad 360^\circ \cong 2\pi,$$

allgemein

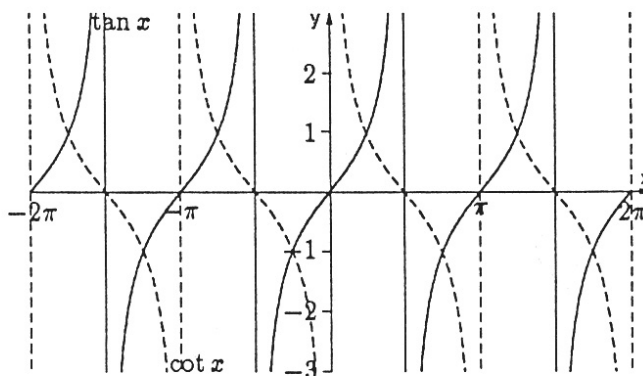
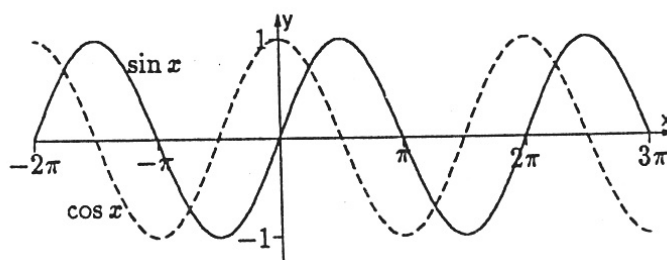
$$\varphi^\circ \hat{=} x, \text{ wenn } \frac{\varphi}{360} = \frac{x}{2\pi}.$$

Entsprechend fassen wir Sinus, etc. als Funktion der Variable x im Bogenmaß auf; die Periodizitätsgleichungen lauten dann also

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x.$$

Achtung: Im folgenden sind alle Winkel im Bogenmaß zu verstehen.

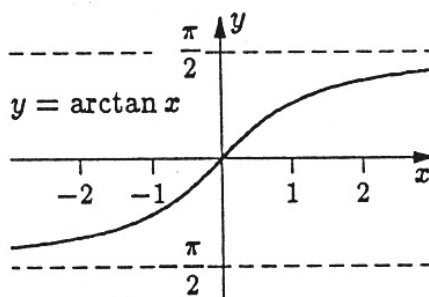
Hier sind die Graphen der trigonometrischen Funktionen:



Beachte die Lage der Nullstellen und dass $\tan x$ nicht bei $x = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, definiert ist.

Die trigonometrischen Funktionen sind nur umkehrbar, wenn man ihre Definitionsbereiche passend einschränkt, zum Beispiel \tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$. Dann existiert die Umkehrfunktion

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{lies: Arcustangens}).$$



Die Arcustangensfunktion taucht in der Integralrechnung wieder auf.

Die trigonometrischen Funktionen sind häufig wichtig bei der Modellierung *periodischer Prozesse*. Ein solcher Prozess mit der Periode T kann durch eine Funktion mit $f(t) = f(t+T)$ für alle t beschrieben werden. Der einfachste Ansatz für eine solche Funktion ist

$$f(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A_0 + A \sin(\omega(t - t_0));$$

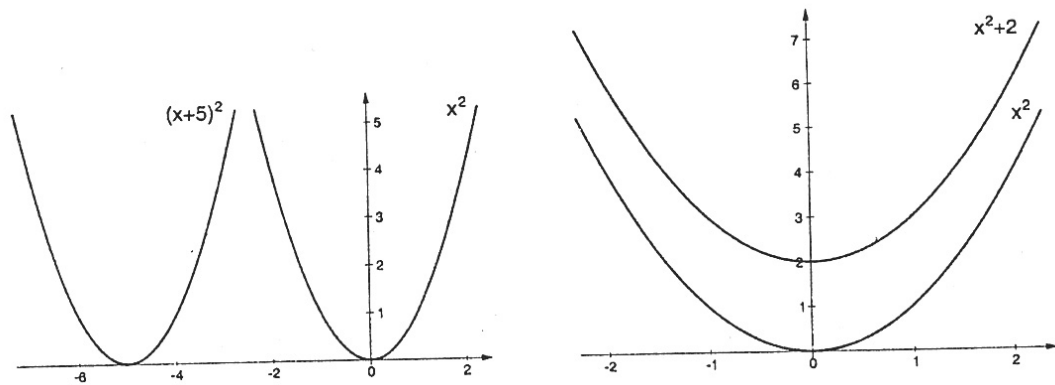
hier ist A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und φ die Phasenverschiebung. Damit man die Periode T erhält, muss, da der Sinus 2π -periodisch ist, $\omega T = 2\pi$ oder $\omega = 2\pi/T$ sein.

I.3 Koordinatentransformationen

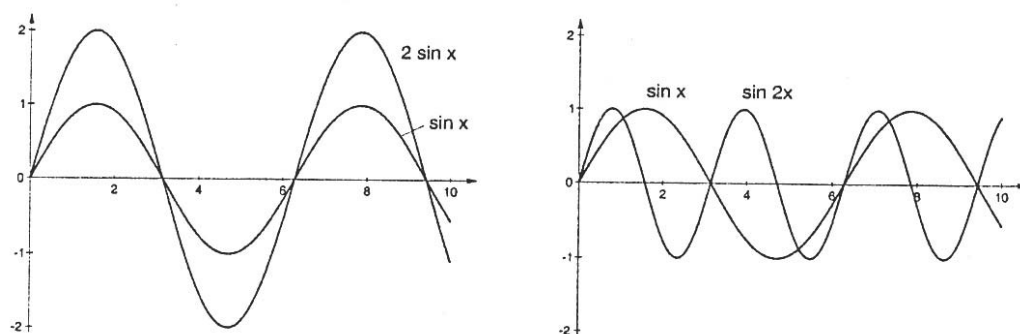
Zunächst etwas zu den einfachen Koordinatentransformationen

$$x \mapsto x + a, \quad y \mapsto y + b, \quad x \mapsto cx, \quad y \mapsto dy.$$

- Wendet man die Funktion $x \mapsto x + a$ vor einer Funktion f an, bewirkt dies eine Translation des Graphen in x -Richtung um $-a$ (z.B. für $a = 3$ um 3 Einheiten nach links).
- Wendet man die Funktion $y \mapsto y + b$ nach einer Funktion f an, bewirkt dies eine Translation des Graphen in y -Richtung um b .



- Die Funktion $y \mapsto cy$ bewirkt *nach* f eine Streckung in y -Richtung. Dabei ergibt sich für $|c| > 1$ eine echte Streckung und für $0 < |c| < 1$ eine Stauchung; ist $c < 0$, wird zunächst an der x -Achse gespiegelt.
- Wendet man die Funktion $x \mapsto dx$ vor einer Funktion f an, ergibt sich eine Stauchung ($|d| > 1$) bzw. Streckung ($0 < |d| < 1$) in x -Richtung.



Interessant sind auch solche (nichtlinearen) Transformationen, die eine komplizierte Funktion in eine lineare Funktion verwandeln. Betrachten wir als Beispiel die Datenreihe

x_i	3.75	4.83	5.16	5.75	6.92	7.25
y_i	46	110	154	295	741	999

Wir suchen eine Funktion $y = f(x)$, die auf diese Daten „passt“. Trägt man die Punkte (x_i, y_i) in ein Koordinatensystem ein, erkennt man kein Muster – das würde man eigentlich auch nur sehen, wenn diese Punkte auf einer Geraden lägen.

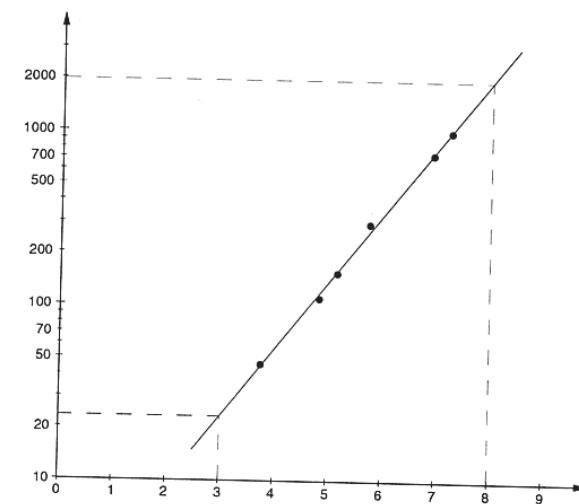
Die Datenreihe gibt übrigens die Anzahl der registrierten AIDS-Fälle in der Bundesrepublik Deutschland wieder; 3.75 (=3+9/12) steht für September 1983, 4.83 für Oktober 1984 usw. In der Anfangsphase der Epidemie darf man exponentielles Wachstum vermuten, also dass das gesuchte f die Gestalt

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (\text{I.2})$$

hat. Logarithmiert man diese Gleichung, erhält man

$$\ln f(x) = \ln c + x \ln a.$$

Wenn (I.2) also die richtige Funktion ist, die hinter der Datenreihe steht, besteht zwischen x_i und $\ln y_i$ ein linearer Zusammenhang. Trägt man die Punkte $(x_i, \ln y_i)$ in ein Koordinatensystem ein, offenbart sich dieser, wenn die Punkte tatsächlich praktisch auf einer Geraden liegen. Natürlich ist es mühsam, die $\ln y_i$ zu berechnen. Mit Hilfe von *logarithmischem Papier* kann man die y -Werte direkt eingeben.



Solch ein Papier ist in y -Richtung nicht äquidistant eingeteilt: Wo in der Skizze 70 steht, verbirgt sich in Wirklichkeit $\ln 70$.

In unserem Beispiel ermitteln wir die Steigung der Geraden zu

$$\frac{\ln 1970 - \ln 23}{8 - 3} = 0.89,$$

denn $(3, 23)$ und $(8, 1970)$ liegen auf der Geraden. Es ist also $\ln a = 0.89$ und $a = 2.435$. Wegen $\ln 23 = \ln c + \ln a \cdot 3$ folgen $\ln c = 0.4656$ und $c = 1.59$. Das Wachstum wird also durch

$$f(x) = 1.59 \cdot 2.435^x$$

beschrieben.

Hat man einen Datensatz, auf den eine Potenzfunktion

$$y = f(x) = cx^r$$

passt, so erkennt man das, wenn man die Datenpunkte in *doppelt logarithmisches Papier* einträgt, denn Logarithmieren zeigt:

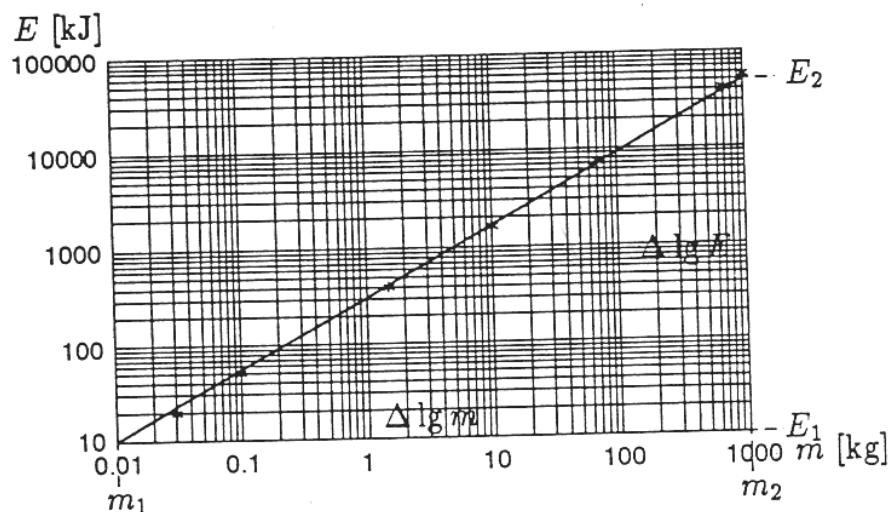
$$\ln y = \ln c + r \cdot \ln x,$$

so dass $\ln y$ eine lineare Funktion von $\ln x$ ist.

Hier ein Beispiel eines solchen Datensatzes: Der Grundumsatz ist diejenige Energie, die ein Organismus ohne größere Leistung verbraucht. Die folgende Tabelle enthält die Körpermassen einiger Lebewesen in kg, deren täglichen Grundumsatz in kJ sowie die logarithmierten Werte.

	m [kg]	E [kJ]	$\ln m$	$\ln E$
Maus	0.03	20	-3.51	3.00
Sperling	0.1	50	-2.30	3.91
Huhn	1.5	400	0.41	6.00
Dackel	10	1700	2.30	7.44
Mensch	70	7300	4.25	8.90
Kuh	700	41000	6.55	10.62
Bulle	1000	53000	6.91	10.88

Diese Daten werden in doppelt logarithmisches Papier eingetragen, statt die Logarithmen in ein übliches Koordinatensystem einzugeben. Man erkennt dann, dass die Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen.



Die Gerade ist übrigens „nach Augenmaß“ eingezeichnet.

Da $(\ln 0.01, \ln 10)$ und $(\ln 1000, \ln 50000)$ auf der Geraden liegen³, ist ihre Steigung

$$r = \frac{\ln 50000 - \ln 10}{\ln 1000 - \ln 0.01} = 0.74,$$

und es ist (angenähert) $c = 300$ (= der Wert über der 1 auf der horizontalen Achse; beachte $\ln 1 = 0$). Der funktionale Zusammenhang ist in diesem Beispiel

$$E = 300 \cdot m^{0.74}.$$

Im Zusammenhang mit dem Zeichnen einer Geraden, die „nach Augenmaß“ am besten durch eine Punktwolke geht, erhebt sich die Frage, wie man eine solche rechnerisch bestimmen kann. Zunächst einmal muss man präzisieren, was mit „am besten“ überhaupt gemeint ist. Nach Gauß benutzt man die *Methode der kleinsten Quadrate*:

Gegeben seien n Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ in der Ebene und eine Gerade $y = mx + b$. Vergleicht man die Werte y_i mit den hypothetischen Werten $mx_i + b$, so bietet sich als Maß für die Abweichung die Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^n ((mx_k + b) - y_k)^2 \tag{I.3}$$

an⁴. Gesucht sind die Koeffizienten m und b , die (I.3) minimieren.

Das ist eine Extremwertaufgabe, aber für die durch (I.3) definierte Funktion der beiden Variablen m und b . Wie man die optimalen Werte m und b findet, geht über den ersten Teil dieser Vorlesung hinaus (siehe jedoch Kapitel V); daher gebe ich nur das Ergebnis an. Dazu führen wir die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

ein. Achtung: $\overline{xy} \neq \bar{x} \cdot \bar{y}$ und $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$.

Dann wird (I.3) minimal für

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{und} \quad b = \bar{y} - m \cdot \bar{x}.$$

Die so definierte Gerade heißt *Regressionsgerade*.

³Die Ausgleichsgerade verläuft *nicht* durch den Datenpunkt $(\ln 1000, \ln 53000)$.

⁴Zur Erinnerung: $\sum_{k=1}^n a_k$ bedeutet $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Kapitel II

Differential- und Integralrechnung

II.1 Folgen und Grenzwerte

Wir betrachten eine Folge reeller Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots ; abkürzend schreibt man (a_n) . Ein paar Beispiele sind $(\frac{1}{n})$, $(n^2 + e^{-n})$, $((1 + \frac{1}{n})^n)$, etc. Zum einen werden wir Folgen und ihre Grenzwerte benötigen, um Ableitung und Integral einzuführen, zum anderen sind diese Begriffe an sich von Interesse, zum Beispiel in der Populationsdynamik.

Betrachte folgendes Experiment: Zu festen Zeitpunkten $n = 1, 2, 3, \dots$ (zum Beispiel alle 40 Minuten oder jeden Tag oder jede Woche) werde die Größe einer Population (von Bakterien, Mäusen, Löwen) gezählt; auf diese Weise erhält man eine Folge $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Man möchte aus einem mathematischen Modell Aussagen über das Langzeitverhalten, also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, gewinnen.

In vielen Fällen beobachtet man, dass der Zuwachs an einem Zeitpunkt n dem Bestand zu diesem Zeitpunkt proportional ist; in Formeln

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\text{Zuwachs}} = r \cdot \underbrace{x_n}_{\text{Bestand}} .$$

Die Proportionalitätskonstante r ist dabei unabhängig von n . Wenn wir $q = 1 + r$ setzen, kann man stattdessen auch

$$x_{n+1} = q \cdot x_n \tag{II.1}$$

schreiben. Hier liegt im Fall $r > 0$ (d.h. $q > 1$) ein tatsächlicher Zuwachs vor, im Fall $r = 0$ (d.h. $q = 1$) ändert sich die Größe der Population nicht, und im Fall $-1 \leq r < 0$ (d.h. $0 \leq q < 1$) nimmt sie ab¹.

Wenn man die Anfangsgröße x_0 kennt, kann man die Größe x_n zu jedem Zeitpunkt berechnen, da $x_1 = qx_0$, $x_2 = qx_1 = q^2x_0$, $x_3 = qx_2 = q^3x_0$ usw. Das allgemeine Glied der in (II.1) „rekursiv“ definierten Folge lautet also

$$x_n = q^n \cdot x_0. \tag{II.2}$$

Nehmen wir nun an, zu jedem Zeitpunkt n werde eine Population, die sich ohne Eingriff nach dem obigen Modell entwickelt, zusätzlich um eine feste Größe d verändert (zum Beispiel kann so die Menge eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben werden, das durch Ausscheidung abnimmt ($0 < q < 1$) und durch eine tägliche Injektion zugeführt wird). $d > 0$

¹Warum sind $r < -1$ bzw. $q < 0$ biologisch unsinnig?

steht dabei für einen konstanten Zugang und $d < 0$ für einen konstanten Abgang. Statt der obigen Gleichung hat man jetzt

$$x_{n+1} - x_n = rx_n + d$$

beziehungsweise

$$x_{n+1} = qx_n + d. \quad (\text{II.3})$$

Versuchen wir, eine explizite Darstellung zu finden, und betrachten wir die ersten paar Folgenglieder:

$$\begin{aligned} x_1 &= qx_0 + d \\ x_2 &= qx_1 + d = q^2x_0 + qd + d \\ x_3 &= qx_2 + d = q^3x_0 + q^2d + qd + d \\ x_4 &= qx_3 + d = q^4x_0 + q^3d + q^2d + qd + d \end{aligned}$$

Man kann jetzt das allgemeine Muster erkennen:

$$x_n = q^n x_0 + (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) d.$$

Es bleibt, die in der Klammer stehende Summe näher zu untersuchen; setze also

$$s_{n-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1.$$

Wir multiplizieren mit q :

$$q \cdot s_{n-1} = q^n + q^{n-1} + \dots + q^2 + q$$

und ziehen die beiden Gleichungen dann voneinander ab:

$$s_{n-1} - q \cdot s_{n-1} = 1 - q^n$$

(denn alle anderen Terme auf der rechten Seite heben sich weg). Auflösen nach s_{n-1} liefert (dazu muss $q \neq 1$ sein)

$$s_{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ersetzen wir noch $n - 1$ durch n , bekommen wir die Formel für die „endliche geometrische Reihe“ für $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{II.4})$$

(Wie lautet (II.4) für $q = 1$?)

Für unsere Folge (x_n) aus (II.3) liefert das

$$x_n = q^n x_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot d. \quad (\text{II.5})$$

Wir wollen jetzt das Langzeitverhalten der Folgen aus (II.2) und (II.5) untersuchen und benötigen dazu den Begriff des Grenzwerts.

Wenn man die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ betrachtet, sieht man, dass die Folgenglieder gegen 0 „streben“; dasselbe passiert für $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ und $(a_n) = (2^{-n})$. Informell meint man damit, dass für „große“ n das Folgenglied a_n dem Betrag nach „klein“ wird, und zwar so klein, wie man möchte, wenn nur n groß genug ist. Mathematiker präzisieren diese Idee folgendermaßen:

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen 0, wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

Solch eine Folge heißt auch *Nullfolge*, und man schreibt $a_n \rightarrow 0$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Allgemeiner erklärt man:

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen die Zahl $a \in \mathbb{R}$ (den *Grenzwert* der Folge), wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt.

Man schreibt dann $a_n \rightarrow a$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Die Definition soll an einem Beispiel erläutert werden; ich behaupte, dass $(\frac{n+1}{n})$ gegen 1 konvergiert. Dazu muss untersucht werden, ob

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

klein wird für große n ; in der Tat ist

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon};$$

setzt man n_0 als die auf $1/\varepsilon$ folgende natürliche Zahl (i.a. ist $1/\varepsilon \notin \mathbb{N}!$), so haben wir wirklich

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| \leq \varepsilon,$$

wie die Definition verlangt.

Hier ein paar Standardbeispiele (ohne Beweis):

- (1) Für jedes $r > 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$.
- (2) Für jedes $|q| < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.
- (3) Für jedes $|q| < 1$ und $r \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r q^n = 0$.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; allgemeiner ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (5) $((-1)^n)$ konvergiert nicht.

Für das Rechnen mit Grenzwerten gilt folgender Satz.

Satz II.1 Seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gelten:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (falls alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$).
- (c) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = ca$.
- (d) Ist $a_n \leq b_n$ für alle n , so folgt $a \leq b$.
- (e) Für $r \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = a^r$ (falls alle $a_n > 0$ und $a > 0$ im Fall $r \notin \mathbb{N}$).
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$ (letzteres falls alle $a_n > 0$ und $a > 0$).

Achtung: In (d) darf man nicht $<$ schreiben; Beispiel: $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ für alle n , aber die Grenzwerte sind gleich.

Mit diesem Satz können wir zum Beispiel begründen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 + n - 6}{n^3 + n^2 + 2n + 7} = -2,$$

denn Kürzen durch n^3 ergibt

$$\frac{-2n^3 + n - 6}{n^3 + n^2 + 2n + 7} = \frac{-2 + \frac{1}{n^2} - \frac{6}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}} \rightarrow \frac{-2 + 0 - 0}{1 + 0 + 0 + 0} = -2.$$

Es ist manchmal sinnvoll, auch ∞ als Grenzwert zuzulassen; man erklärt:

Eine Folge (a_n) strebt gegen ∞ , wenn es zu jeder noch so großen Zahl $M > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $a_n \geq M$ gilt.

Solche Folgen nennt man *eigentlich divergent* statt konvergent. Man schreibt $a_n \rightarrow \infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Satz II.1 gilt dann entsprechend, wenn niemals die Terme $\infty - \infty$ oder $0 \cdot \infty$ auftreten (zum Beispiel: Wenn $a_n \rightarrow 2$, $b_n \rightarrow \infty$, so $a_n + b_n \rightarrow \infty$).

Jetzt kann man das Grenzwertverhalten einer Folge der Bauart

$$a_n = \frac{p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + \dots + p_1 n + p_0}{q_l n^l + q_{l-1} n^{l-1} + \dots + q_1 n + q_0}$$

(wobei $p_k \neq 0$, $q_l \neq 0$) bestimmen. Indem man durch n^l kürzt, sieht man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } k < l, \\ \frac{p_k}{q_l} & \text{für } k = l, \\ \infty & \text{für } k > l \text{ und } \frac{p_k}{q_l} > 0, \\ -\infty & \text{für } k > l \text{ und } \frac{p_k}{q_l} < 0. \end{cases}$$

Für unsere Populationsmodelle (Seite 15 bis 16) ergibt sich also folgendes Langzeitverhalten. Beim exponentiellen Wachstum (vgl. (II.2)) ist²

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \infty & \text{falls } q > 1, \\ x_0 & \text{falls } q = 1, \\ 0 & \text{falls } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Beim exponentiellen Wachstum mit Zu- oder Abgang (vgl. (II.5)) ist zum Beispiel für $0 < q < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{d}{1 - q}.$$

Es ist erstaunlich, dass dieser Grenzwert unabhängig vom Anfangsbestand x_0 ist.

Zum Schluss dieses Abschnitts wird der Grenzwertbegriff auf Funktionen übertragen. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Ferner sei $x_0 \in I$ oder ein Randpunkt von I . Dann bedeutet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

dass für alle Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in I$, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

f heißt *stetig* auf I , wenn für alle $x_0 \in I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Beispiele sind:

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$; dann ist

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad (= f(2)),$$

da wegen Satz II.1 gilt: $x_n \rightarrow 2 \Rightarrow x_n^2 \rightarrow 2^2 = 4$.

²Hier setzen wir natürlich $x_0 > 0$ voraus. Die Konsequenz eines unendlichen Grenzwerts deutet darauf hin, dass das exponentielle Modell nur bedingt tauglich ist, da ja die Ressourcen stets begrenzt sind. Wir kommen darauf in Kapitel III zurück.

(2) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $x_0 = 0$; dann ist

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

(denn da $I = (0, \infty)$ ist, sind nur positive x_n zugelassen).

(3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$.

Dann existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht, da für $x_n = \frac{1}{n}$ ($\Rightarrow \lim x_n = 0$) $f(x_n) \rightarrow 1$, aber für $\tilde{x}_n = -\frac{1}{n}$ ($\Rightarrow \lim \tilde{x}_n = 0$) $f(\tilde{x}_n) \rightarrow 0$.

Als Faustregel gilt: Der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall macht keine „Sprünge“. Intuitiv bedeutet Stetigkeit bei x_0 , dass

$$x \approx x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \approx f(x_0).$$

Aus Satz II.1 folgt, dass praktisch alle durch eine explizite Formel definierten Funktionen stetig sind.

II.2 Unendliche Reihen

Mit dem Begriff der konvergenten Folge eng verwandt ist der Begriff der *Reihe*. Wenn man die Glieder einer Folge a_1, a_2, a_3, \dots aufsummiert, entsteht die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Zum Beispiel entsteht für $a_k = 2^{-k}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Um diesen Ausdrücken einen Sinn zuordnen zu können, betrachten wir die sogenannten Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

und untersuchen, ob die Folge der s_n konvergiert. Im Beispiel ist das wegen

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad (\text{siehe (II.4)}) \\ &= 1 - 2^{-n} \end{aligned}$$

der Fall; hier ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

Man erklärt nun allgemein:

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen A , wenn die Folge der Partialsummen s_n gegen A konvergiert; in Zeichen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Also gilt in unserem Beispiel von oben $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Dies ist ein Beispiel einer *geometrischen Reihe*. Die allgemeine geometrische Reihe lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Achtung: Der erste Folgenindex ist $k = 0$, das ist eine für die geometrische Reihe übliche Konvention.

Wir haben gezeigt (siehe (II.4)), dass für $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt. Daraus folgt, dass diese Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Für $q \geq 1$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$$

(solche Reihen nennt man *eigentlich divergent* statt konvergent); für $q \leq -1$ lässt sich $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ keinerlei Sinn geben, insbesondere ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) \pm \dots$$

nicht konvergent.

Für unendliche Reihen gelten ähnliche Rechenregeln wie für konvergente Folgen.

Satz II.2 Gelte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = cA$

Achtung: Es gibt keine Formel für $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k)$. Von theoretischem Interesse ist der folgende einfache Satz.

Satz II.3 Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Begründung: Für die Folge der Partialsummen s_n wissen wir nach Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Dann ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = A$$

und deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = A - A = 0.$$

Aber $s_n - s_{n-1} = a_n$; also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gezeigt.

Achtung: Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch, denn es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Begründung hierfür: Wir schätzen folgende speziellen Partialsummen ab:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \geq 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{= s_4 \geq 2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geq 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Allgemein:

$$s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

Daraus folgt $s_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, wie behauptet.

Eine Variante der Formel über die geometrische Reihe ist

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

denn

$$q^m + q^{m+1} + \dots = q^m(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{q^m}{1-q}.$$

Man kann dieses Argument auch mit dem \sum -Symbol formulieren:

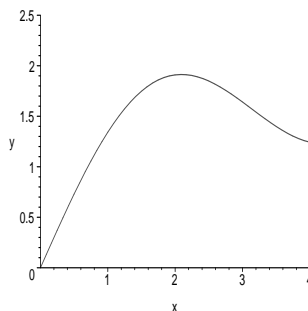
$$\sum_{k=m}^{\infty} q^k = \sum_{k=m}^{\infty} q^m(q^{k-m}) = q^m \sum_{k=m}^{\infty} q^{k-m} = q^m \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{q^m}{1-q};$$

statt $k - m$ schreibe l ; wenn k die Zahlen $m, m + 1, m + 2, \dots$ durchläuft, durchläuft l die Zahlen $0, 1, 2, \dots$.

Konvergente Reihen werden uns in Abschnitt II.4 wieder begegnen.

II.3 Die Ableitung einer Funktion

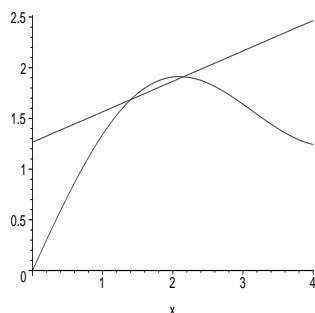
Während eine Funktion f angibt, wie groß eine dadurch repräsentierte Größe an der Stelle x ist (nämlich $f(x)$), wollen wir jetzt danach fragen, wie sich die Größe *ändert*. Misst die Funktion f etwa, welche Strecke wir bis zum Zeitpunkt x zurückgelegt haben, so fragen wir jetzt nach der Änderungsrate an einem Zeitpunkt x , also nach der Geschwindigkeit. Wenn die Funktion linear ist, also $f(x) = mx + b$, ist die Änderungsrate m . Im allgemeinen können wir versuchen, diese Änderungsrate zu approximieren. Sieht der Graph von f so aus:



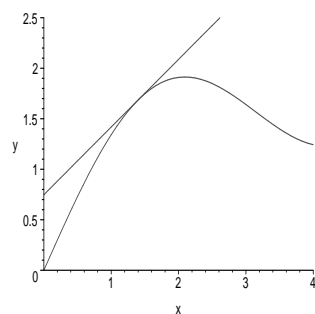
so können wir zwischen zwei Zeitpunkten x_0 und $x_0 + h$ die Durchschnittsgeschwindigkeit mittels

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ermitteln; geometrisch ist das die Sekantensteigung zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ auf dem Graphen:



Um nun zur momentanen Änderungsrate (=momentanen Geschwindigkeit) zu gelangen, machen wir (wenn das geht) den Grenzübergang $h \rightarrow 0$; geometrisch führt das zur Tangente an der Kurve:



Die Funktionen, bei denen das Verfahren klappt, heißen *differenzierbar*. Hier ist die formale Definition:

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall, und sei $x_0 \in I$. f heißt differenzierbar bei x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

in \mathbb{R} existiert ($\pm\infty$ sind also verboten)³. Diese Zahl wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und Ableitung von f bei x_0 genannt. Ist f an jeder Stelle differenzierbar, so nennt man die Funktion selbst differenzierbar, und die Funktion $f': I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, heißt die Ableitung von f .

Merke: Die Ableitung f' gibt die Änderungsrate der Funktion f wieder.

Wir wollen die Definition der Ableitung an zwei Beispielen nachvollziehen.

(1) Sei $f(x) = x^2$. An einer Stelle x_0 ist der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

³Die h 's dürfen größer oder kleiner als Null sein, aber nie gleich Null.

zu untersuchen. Ausführlich heißt das: Für eine Folge (h_n) mit $h_n \rightarrow 0$, aber $h_n \neq 0$, untersuche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_0 + h_n)^2 - x_0^2}{h_n}.$$

Nun ist

$$\frac{(x_0 + h_n)^2 - x_0^2}{h_n} = \frac{x_0^2 + 2h_n x_0 + h_n^2 - x_0^2}{h_n} = \frac{2h_n x_0 + h_n^2}{h_n} = 2x_0 + h_n \rightarrow 2x_0.$$

Also ist die durch $f(x) = x^2$ definierte Funktion an jeder Stelle differenzierbar, und ihre Ableitung ist $f'(x) = 2x$.

(2) Sei $f(x) = |x|$. f ist nicht differenzierbar bei $x_0 = 0$. Es ist nämlich

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

aber

$$\frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1;$$

also existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ nicht.

Es folgt ein Katalog weiterer Standardbeispiele:

$$\begin{aligned} f(x) = x^r &\Rightarrow f'(x) = r x^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \\ f(x) = e^x &\Rightarrow f'(x) = e^x \quad (\text{Begründung folgt}) \\ f(x) = \ln x &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = \sin x &\Rightarrow f'(x) = \cos x \\ f(x) = \cos x &\Rightarrow f'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

Zur Ableitung von $f(x) = e^x$: In Abschnitt I.2.4 war die e -Funktion unter allen Funktionen der Bauart a^x (deren Differenzierbarkeit wir hier stillschweigend voraussetzen) dadurch definiert worden, dass ihre Tangente im Punkt $(0, 1)$ die Steigung 1 hat; mit anderen Worten gilt definitionsgemäß für $f(x) = e^x$, dass $f'(0) = 1$. Das heißt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Sei jetzt $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} = f(x_0). \end{aligned}$$

Weitere Beispiele kann man mit den folgenden Rechenregeln behandeln.

Satz II.4 Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$. Für (d) sei zusätzlich stets $g(x) \neq 0$.

- (a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- (b) $(cf)' = cf'$
- (c) $(fg)' = f'g + fg'$ („Produktregel“)
- (d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ („Quotientenregel“)

Ausführlich bedeutet zum Beispiel (c): Die durch $h(x) = f(x)g(x)$ definierte Funktion hat bei x die Ableitung $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Beispiel: Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, hat \tan die Ableitung

$$\frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Die Komposition zweier Funktionen $f: I \rightarrow J$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x)) \quad (\text{lies: „}g \text{ Kringel } f\text{“})$$

definiert. Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Dann ist $g \circ f: x \mapsto e^{x^2}$, aber $f \circ g: x \mapsto e^{2x}$.

Satz II.5 (Kettenregel) Seien $f: I \rightarrow J$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Beispiele sind:

$$(1) f(x) = x^2, g(x) = e^x \implies (g \circ f)'(x) = e^{f(x)} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x$$

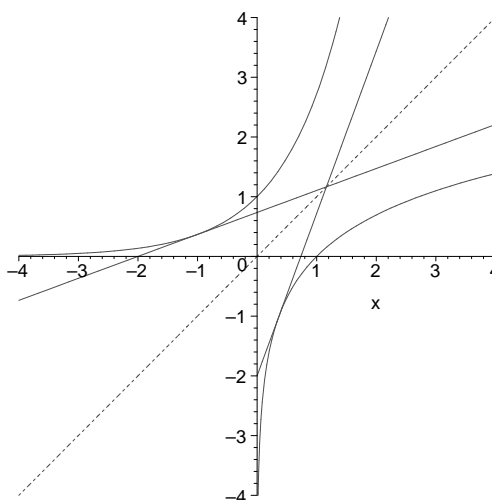
$$(2) h(x) = e^{\lambda x} \text{ hat die Ableitung } h'(x) = \lambda e^{\lambda x}. \text{ (Warum?)}$$

Wir kommen zur Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Sei $f: I \rightarrow J$ eine umkehrbare Funktion und $g: J \rightarrow I$ ihre Umkehrfunktion. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz II.6 Ist f bei x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist g bei $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dass das stimmt, sieht man an folgender Skizze, denn hat die Tangente an die Funktion f die Steigung m , so hat die Tangente an g die Steigung $1/m$, denn sie entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden:



Mit dem traditionellen Variablennamen x heißt die Formel

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Beispiele sind:

- (1) Wenn man weiß, dass e^x die Ableitung e^x hat, folgt jetzt für die Ableitung der Umkehrfunktion, also von \ln , dass

$$\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},$$

wie auf Seite 23 behauptet.

- (2) Oben haben wir für $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + (\tan x)^2$$

gezeigt. Also gilt für die Umkehrfunktion $g(x) = \arctan x$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(Für jede Funktion f mit Umkehrfunktion g gilt $f(g(x)) = x$; d.h. $f \circ g = \text{id}$, wo $\text{id}: x \mapsto x$ die identische Funktion ist. Hier also $\tan(\arctan x) = x$.)

Betrachten wir zum Schluss höhere Ableitungen. Sei f differenzierbar mit Ableitung f' . Wenn wir Glück haben, ist auch die Funktion f' differenzierbar, ihre Ableitung heißt die zweite Ableitung von f und wird mit f'' bezeichnet. (Beispiel: $f(x) = e^{2x} + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 2x \Rightarrow f''(x) = 4e^{2x} + 2$.) Und wenn f'' differenzierbar ist, kann man die dritte Ableitung f''' definieren usw. Allgemein bezeichnet man mit $f^{(n)}$ die n -te Ableitung von f .

Im nächsten Abschnitt lernen Sie, was die erste und zweite Ableitung über eine Funktion aussagen. Die dritte Ableitung wird selten benötigt; in einer Ansprache hat sie der ehemalige US-Präsident Nixon erwähnt, als er sagte: „Die Steigung der Inflationsrate hat sich verlangsamt.“

Noch etwas zur Bezeichnung. Nach Leibniz bezeichnet man die Ableitung einer durch $y = f(x)$ gegebenen Funktion auch mit $\frac{dy}{dx}$ (lies: dy nach dx). Beispiel: $y = x^2 + \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + \cos x$. Diese rein symbolische Schreibweise ist zum Beispiel bei der Substitutionsregel der Integralrechnung (siehe Seite 36) praktisch.

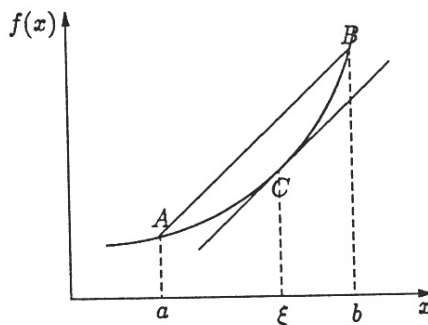
II.4 Anwendungen der Differentialrechnung

Weiß man etwas über die Ableitung einer Funktion, kann man das häufig in Aussagen über die Funktion übersetzen. Diese Schlüsse basieren oft auf dem folgenden Satz.

Satz II.7 (Mittelwertsatz) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ (lies: ξ) mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Skizze dazu:



Beachte, dass es in der Regel mehrere solcher Stellen ξ gibt.

Wenn f eine konstante Funktion auf einem Intervall ist (d.h. $f(x) = c$), ist natürlich die Ableitung $f'(x) = 0$ für alle x . Gibt es noch andere Funktionen mit Ableitung 0? Der nächste Satz sagt aus, dass das nicht der Fall ist.

Satz II.8 Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I , für die $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt. Dann ist f eine konstante Funktion.

Das folgt aus dem Mittelwertsatz: Betrachtet man nämlich irgend zwei Punkte a und b im Intervall I , muss man begründen, dass $f(a) = f(b)$ ist. Wähle nun zu a und b eine Stelle ξ wie im Mittelwertsatz behauptet; dann folgt

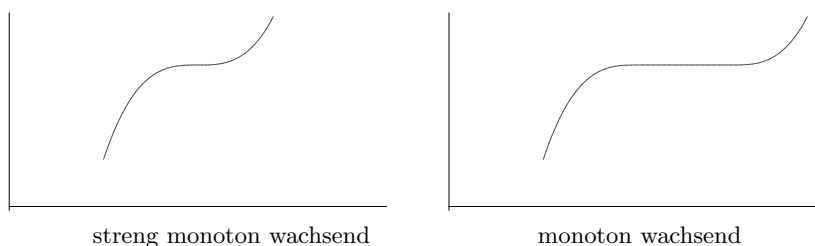
$$0 = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

wobei die erste Gleichung nach Voraussetzung des Satzes gilt. Also ist wirklich $f(a) = f(b)$.

Eine Funktion f auf einem Intervall heißt

monoton wachsend,	wenn für $x < y$ stets	$f(x) \leq f(y)$	folgt.
streng monoton wachsend,		$f(x) < f(y)$	
monoton fallend,		$f(x) \geq f(y)$	
streng monoton fallend,		$f(x) > f(y)$	

Skizze:



Satz II.9 Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall.

- (a) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \iff f$ monoton wachsend.
- (b) $f'(x) > 0$ für alle $x \implies f$ streng monoton wachsend.
- (c) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \iff f$ monoton fallend.
- (d) $f'(x) < 0$ für alle $x \implies f$ streng monoton fallend.

Auch das folgt aus dem Mittelwertsatz. Um zum Beispiel (b) zu begründen, nehme man sich zwei Stellen $x < y$ im Intervall. Nach dem Mittelwertsatz (mit x statt a und y statt b) existiert eine Stelle ξ , $x < \xi < y$, mit

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Aber an jeder Stelle ist nach Voraussetzung von (b) die Ableitung > 0 , also auch bei ξ . Daher ist

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0,$$

also wegen $y > x$ in der Tat $f(y) > f(x)$, wie behauptet.

Bei den anderen Teilen argumentiert man ähnlich. Dass in (b) nicht \iff gilt, sieht man zum Beispiel an $f(x) = x^3$.

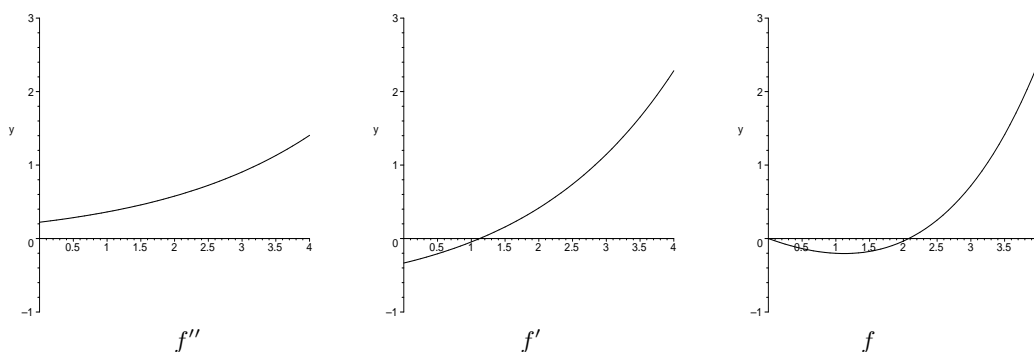
Nun zur zweiten Ableitung.

Satz II.10 Sei f auf einem Intervall zweimal differenzierbar.

- (a) $f''(x) > 0$ für alle $x \implies$ Graph von f nach links gekrümmt.
 (b) $f''(x) < 0$ für alle $x \implies$ Graph von f nach rechts gekrümmt.

Begründung für (a): $f''(x) > 0$ für alle $x \implies f'$ streng monoton wachsend (nach Satz II.9) \implies Tangentensteigung an den Graphen von f wird größer \implies Graph von f nach links gekrümmt.

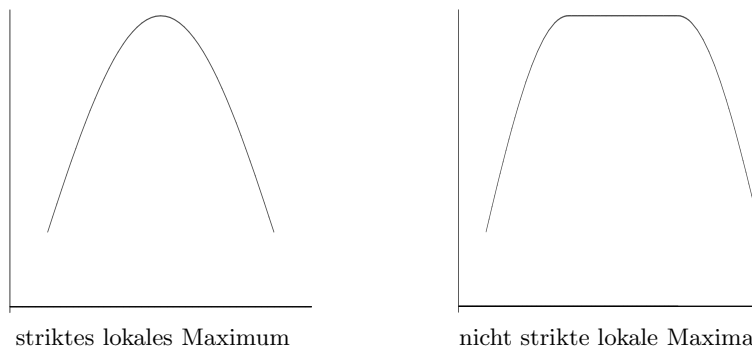
Zum Beispiel:



Ist der Graph von f nach links [rechts] gekrümmt, nennt man f konvex [konkav].

Jetzt können wir Extremwertaufgaben diskutieren. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat bei x_0 ein *lokales Minimum* [lokales Maximum], wenn für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung $U = \{x \in I: |x - x_0| < \delta\}$ gilt: $f(x_0) \leq f(x)$ [bzw. $f(x_0) \geq f(x)$].

Gilt für alle von x_0 verschiedenen $x \in U$ sogar $f(x_0) < f(x)$ [bzw. $f(x_0) > f(x)$], spricht man von einem *strikten* lokalen Minimum [Maximum].



Satz II.11 Sei f auf einem Intervall I differenzierbar und x_0 im Inneren des Intervalls (also kein Randpunkt). Wenn f bei x_0 ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Zur Begründung gehen wir auf die Definition der Differenzierbarkeit zurück. Nehmen wir zum Beispiel an, dass bei x_0 ein lokales Maximum vorliegt. Sei (x_n) eine Folge in I mit $x_n < x_0$ (da x_0 im Inneren liegt, gibt es auf jeden Fall solche Folgen), und schreiben wir $x_n = x_0 + h_n$ (also $h_n < 0$). Dann ist

$$0 \leq \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n},$$

da der Zähler ≤ 0 ist (weil x_0 Maximalstelle) und der Nenner < 0 (weil $x_n < x_0$). Deshalb ist nach Satz II.1(d) auch der Grenzwert ≥ 0 , d.h. $f'(x_0) \geq 0$.

Wählt man eine Folge (x_n) in I mit $x_n > x_0$, folgt analog

$$0 \geq \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Deshalb folgt diesmal $f'(x_0) \leq 0$. Damit ist gezeigt, dass $f'(x_0) = 0$ ist.

Der Satz besagt, dass die einzigen Kandidaten für einen Extremwert diejenigen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ und die Randpunkte des Intervalls sind.

Wie man an $f(x) = x^3$ sieht, folgt aus $f'(x_0) = 0$ allein noch nicht, dass ein lokales Extremum vorliegt. Aber es gilt:

Satz II.12 Sei f auf einem Intervall I zweimal differenzierbar und x_0 im Inneren von I . Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ [bzw. < 0] gelten, liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum [Maximum] vor.

Zur Begründung des (sagen wir) Minimumfalls wollen wir die etwas schärfere Annahme machen, dass sogar in einer Umgebung $U = \{x \in I: |x - x_0| < \delta\}$ die Ungleichung $f''(x) > 0$ gilt⁴. Dann hat der Graph von f bei x_0 eine waagerechte Tangente ($f'(x_0) = 0$) und ist in U nach links gekrümmt (Satz II.10). Also liegt ein striktes lokales Minimum vor.

Zum Auffinden der *globalen* Minima und Maxima muss man jetzt die Kandidaten für die lokalen Extrema und die Randpunkte durchprobieren.

Ist das Intervall *kein* abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, braucht es keine (lokalen oder globalen) Extrema zu geben. Beispiel: $f(x) = \tan x$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Kommen wir zu einem Beispiel. In manchen Zellgeweben gibt es Zellen, die wie aufrecht stehende Zylinder mit kreisförmiger Grundfläche aussehen. Man bestimme den Radius r der Grundfläche und die Höhe h des Zylinders festen Volumens V , für den die Gesamtoberfläche minimal wird. Was ist dann der Quotient h/r ?

Das Volumen ist $V = \pi r^2 h$ und die Oberfläche $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$ (Mantelfläche + 2·Grundfläche). Löst man V nach h auf ($h = \frac{V}{\pi r^2}$) und setzt das in A ein, erhält man die Oberfläche als Funktion von r :

$$A = f(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2, \quad 0 < r < \infty.$$

Wir lösen die Gleichung $f'(r_0) = 0$, das ist

$$f'(r_0) = -\frac{2V}{r_0^2} + 4\pi r_0 = 0,$$

also

$$r_0^3 = \frac{V}{2\pi},$$

d.h.

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Einsetzen in die 2. Ableitung $f''(r) = 4V/r^3 + 4\pi$ zeigt, dass

$$f''(r_0) = 8\pi + 4\pi > 0,$$

also liegt bei x_0 ein lokales Minimum vor. Da das die einzige Extremalstelle in $(0, \infty)$ ist und da $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty$, ist bei r_0 das globale Minimum. Die zugehörige Höhe ist

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

mit dem Quotienten

$$\frac{h_0}{r_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{r_0} = \frac{V}{\pi r_0^3} = \frac{V}{\pi \frac{V}{2\pi}} = 2.$$

⁴In allen praktischen Beispielen folgt das sogar automatisch aus $f''(x_0) > 0$; es folgt immer, wenn f'' stetig ist.

Als letztes wollen wir uns mit der Approximation einer Funktion f „in der Nähe“ einer Stelle x_0 durch Polynome beschäftigen. Von der Funktion f nehmen wir an, dass alle Ableitungen existieren; ferner sei der Einfachheit halber $x_0 = 0$.

Die Ableitung $f'(0)$ liefert uns die Steigung der Tangente im Punkt $(0, f(0))$; daher ist die lineare Funktion

$$p_1(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$$

eine gute Näherung für $f(x)$, wenn x in der Nähe der 0 liegt. Beachte, dass $p_1(0) = f(0)$ und $p_1'(0) = f'(0)$. Man kann nun vermuten, dass man mit einem quadratischen Polynom

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

eine noch bessere Näherung erhält. Ein vielversprechender Ansatz für die Wahl der Koeffizienten ist, diese so zu bestimmen, dass

$$p_2(0) = f(0), \quad p_2'(0) = f'(0), \quad p_2''(0) = f''(0).$$

Wegen $p_2'(x) = a_1 + 2a_2x$ und $p_2''(x) = 2a_2$ führt das auf

$$p_2(0) = a_0 = f(0), \quad p_2'(0) = a_1 = f'(0), \quad p_2''(0) = 2a_2 = f''(0).$$

Man nennt

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

das *2. Taylorpolynom* im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Beispiele sind:

- (1) $f(x) = e^x$. Hier ist $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, also $p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
- (2) $f(x) = \cos x$. Hier ist $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, also $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ und deshalb $p_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. In der Tat approximiert p_2 die Funktion f sehr gut, wie das Beispiel $p_2(0.1) = 0.995$, $\cos 0.1 = 0.995004 \dots$ illustriert.
- (3) $f(x) = \sin x$. Hier ist $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, also $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ und deshalb $p_2(x) = x$.

Der nächste Schritt wäre dann, kubische Polynome zu betrachten. Der Ansatz

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

mit der Forderung $p_3(0) = f(0), \dots, p_3'''(0) = f'''(0)$ liefert dann mit ähnlicher Rechnung wie oben

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Und dann kommen analog p_4, p_5 etc. Man erhält: Das sogenannte *n-te Taylorpolynom* ist

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k;$$

es hat die Eigenschaft, dass $p_n(0) = f(0)$, $p_n'(0) = f'(0)$, \dots , $p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$. In der Formel taucht das Symbol $k!$ (lies: k Fakultät) auf; es bedeutet

$$k! = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

In den Beispielen ist

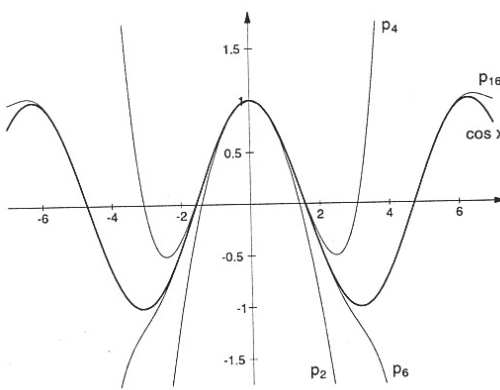
$$f(x) = e^x \rightsquigarrow p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \cos x \rightsquigarrow p_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(x) = \sin x \rightsquigarrow p_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beachte: Für $f(x) = e^x$ ist $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 1$; für $f(x) = \cos x$ sind diese Zahlen $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$; für $f(x) = \sin x$ sind es $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

Dass die Approximationen durch p_n mit wachsendem n immer besser werden, zeigt folgende Skizze:



Für praktisch alle Funktionen gilt tatsächlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x,$$

d.h. nach Definition der unendlichen Reihe (Seite 19)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k.$$

In unseren drei Beispielen ergeben sich die Reihendarstellungen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

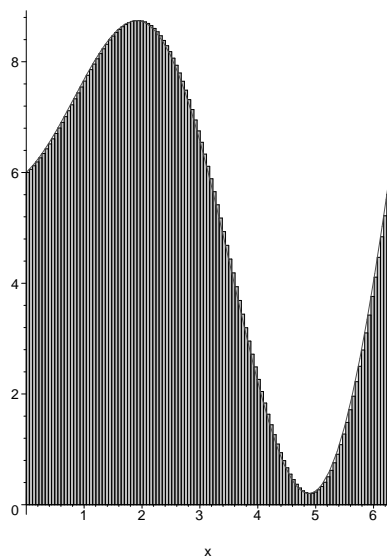
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots$$

II.5 Integralrechnung

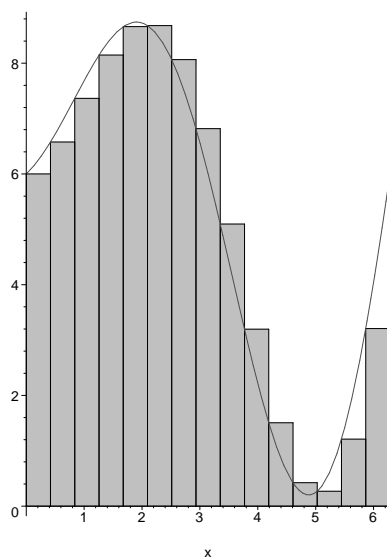
Die Integralrechnung wurde entwickelt, um den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Bereiche zu berechnen; aber auch viele physikalische Fragestellungen werden durch Integrale behandelt (siehe Seite 37).

Zuerst zur Definition des (bestimmten) Integrals. Gegeben sei eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; wir nehmen zunächst zusätzlich an, dass stets $f(x) \geq 0$ gilt. Wir versuchen, den

Flächeninhalt zwischen der x -Achse, den senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ und dem Graphen von f zu berechnen:



Leider kann man leicht nur Flächeninhalte von Rechtecken berechnen; daher könnte man auf die Idee kommen, den gesuchten Flächeninhalt durch Rechtecksinhalte zu approximieren, etwa so: Wir geben eine (große) Zahl $n \in \mathbb{N}$ vor und zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ durch Einfügen von Teilpunkten x_1, x_2, \dots . In jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ wählen wir nun einen Punkt aus (sagen wir den linken Randpunkt, also x_i) und errichten über $[x_i, x_{i+1}]$ das Rechteck mit der Höhe $f(x_i)$.



Manche dieser Rechtecke sind größer als das entsprechende Flächenstück unter der Kurve und manche sind kleiner; die Summe der Rechtecksinhalte, das ist

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{b-a}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x, \quad (\text{II.6})$$

wird jedoch als gute Approximation des gesuchten Inhalts gelten können, wenn n groß ist.

Man kann nun beweisen, dass für alle stetigen Funktionen (egal, ob positiv oder nicht) der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

existiert (in \mathbb{R}); man nennt die entstehende Zahl das *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Das Symbol \int soll an ein langes S (wie Summe) erinnern; vgl. die Analogie zu $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x$; aus dem Δx ist im Grenzwert ein dx geworden. Beachte, dass dx nur die Funktion einer Eselsbrücke hat, daran zu erinnern, wie die Integrationsvariable heißt. Zum Beispiel ist $\int_0^2 x^2 dx$ dasselbe wie $\int_0^2 t^2 dt$, aber $\int_0^2 (x + 2t + 1)^2 dx$ (mit einer Konstanten t) ist etwas anderes als $\int_0^2 (x + 2t + 1)^2 dt$ (mit einer Konstanten x).

Die ganze Sache funktioniert genauso, wenn f auch negative Werte annimmt; Flächenstücke unter der x -Achse werden dann negativ gezählt. Ferner reicht es, dass f „stückweise stetig“ ist, wie im folgenden Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Aus der Definition folgt dann mit Hilfe von Satz II.1 ziemlich leicht:

Satz II.13 Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (stückweise) stetig.

- (a) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$
- (b) $\int_a^b r f(x) dx = r \int_a^b f(x) dx$ für alle $r \in \mathbb{R}.$
- (c) Ist stets $f(x) \leq g(x)$, so folgt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$
- (d) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

Es ist praktisch, $\int_a^b f(x) dx$ auch für $b < a$ zu erklären, und zwar durch

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Ist f auf einem Intervall I (stückweise) stetig und sind $a, b, c \in I$, so gilt dann unter allen Umständen

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (\text{II.7})$$

Wir haben jetzt zwar schon Rechenregeln für das Integral kennengelernt, aber noch kein einziges Beispiel gerechnet. Das wäre auch sehr mühselig, wenn man immer auf die Definition zurückgreifen müsste, also den Grenzwert der Summe in (II.6) bestimmen müsste. Glücklicherweise geht es einfacher; wie, folgt aus dem nächsten Satz, der das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels enthält.

Satz II.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; 1. Version)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig⁵; definiere $F_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$. Dann ist F_0 differenzierbar, und es gilt $F_0' = f$.

⁵Stückweise stetig reicht jetzt nicht mehr.

Obwohl der Satz eine Verbindung zwischen zwei scheinbar unzusammenhängenden Operationen, nämlich Differentiation und Integration, herstellt, ist es nicht schwer zu verstehen, warum er richtig sein muss. Wir müssen doch für jedes x zeigen, dass für jede Folge $h_n \rightarrow 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_0(x + h_n) - F_0(x)}{h_n} = f(x). \quad (\text{II.8})$$

Aus (II.7) folgt

$$\frac{F_0(x + h_n) - F_0(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \left(\int_a^{x+h_n} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt.$$

Nun ist f stetig. Wenn h_n „klein“ ist (was wegen $h_n \rightarrow 0$ dann eintritt, wenn n groß genug ist), ist $f(t)$ zwischen x und $x + h_n$ „praktisch konstant“ (vergleiche Seite 19), nämlich $\approx f(x)$. Geometrisch heißt das, dass das krummlinige Flächenstück zwischen x und $x + h_n$ „praktisch“ ein Rechteck (mit den Seitenlängen h_n und $f(x)$) ist. Also ist

$$\frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt \approx \frac{1}{h_n} \cdot h_n \cdot f(x) = f(x).$$

Zusammengenommen haben wir gezeigt: Für hinreichend große n gilt

$$\frac{F_0(x + h_n) - F_0(x)}{h_n} \approx f(x),$$

und das ist, was (II.8) in präzisen mathematischen Begriffen behauptet.

Um den Hauptsatz zur Berechnung von Integralen einsetzen zu können, ist es praktisch, folgende Sprechweise einzuführen:

Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* von f , wenn $F' = f$ gilt.

Natürlich ist eine Stammfunktion zu f nicht eindeutig bestimmt; mit F ist auch $G = F + c$ ($c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion. Das ist klar; viel weniger klar ist, dass auch die Umkehrung gilt⁶: Wenn F und G Stammfunktionen von f auf einem Intervall sind, existiert eine Konstante c mit $G = F + c$; anders gesagt unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante. (Begründung: Betrachten wir $H = G - F$, so gilt nach Voraussetzung $H' = G' - F' = f - f = 0$, also ist H nach Satz II.8 eine Konstante.)

Satz II.15 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; 2. Version)

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F irgendeine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Nach Satz II.14 ist nämlich F_0 (siehe oben) eine Stammfunktion von f , also gilt $F_0 = F + c$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F_0(b) && \text{(nach Definition von } F_0) \\ &= F_0(b) - F_0(a) && \text{(da } F_0(a) = \int_a^a f(t) dt = 0) \\ &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Man schreibt häufig statt $F(b) - F(a)$

$$F(x) \Big|_a^b.$$

⁶Man mache sich klar, dass dies eine andere Behauptung als zuvor ist!

Damit ist das Berechnen eines Integrals auf das Finden einer Stammfunktion zurückgeführt, und das geschieht häufig durch *Rückwärtslesen von Ableitungsregeln*. Zum Beispiel wissen wir, dass $3x^2$ die Ableitung von x^3 ist. Also ist x^2 die Ableitung von $\frac{1}{3}x^3$, d.h. $\frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion von x^2 . Diese Aussage drückt man symbolisch durch das *unbestimmte Integral*

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

aus⁷. Allgemein bedeutet

$$\int f(x) dx = F(x),$$

dass F eine Stammfunktion von f ist.

Wir können also konkret berechnen, dass zum Beispiel

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

Um weitere Beispiele zu berechnen, benötigen wir einen Katalog von Stammfunktionen; diesen gewinnen wir aus dem Katalog von Ableitungen auf Seite 23:

$$\begin{aligned} \int x^r dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} \quad (r \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln x \quad (\text{für } x > 0) \\ \int e^x dx &= e^x \\ \int \cos x dx &= \sin x \\ \int \sin x dx &= -\cos x \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \quad (\text{vergleiche Seite 25}) \end{aligned}$$

Also ist zum Beispiel $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$.

Das Integral $\int \frac{1}{x} dx$ kann auch links vom Ursprung berechnet werden. Für $x < 0$ ist doch $\ln|x| = \ln(-x)$, daher (Kettenregel!) hat $\ln|x|$ auf $(-\infty, 0)$ die Ableitung $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Wir haben also

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| \quad \text{für } x \neq 0;$$

in Worten: Auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält, ist $\ln|x|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Beispiel:

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3.$$

(Warum ist klar, dass dieses Integral negativ sein muss?)

Mehr Beispiele erhält man durch Rückwärtslesen von (a) und (b) aus Satz II.4, nämlich

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int cf(x) dx &= c \int f(x) dx. \end{aligned}$$

Leider gibt es keine einfache Formel für das Integral eines Produkts, sondern nur zwei komplizierte, die Regel von der partiellen Integration und die Substitutionsregel.

⁷Viele Leute schreiben auch $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$.

Satz II.16 (Partielle Integration)

$$(a) \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$(b) \quad \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Das folgt durch Rückwärtslesen der Produktregel der Differentiation, Satz II.4(c).

Beispiel: Berechne $\int x \sin x dx$. Wenn man versucht, partiell zu integrieren, kann man zwei Ansätze machen: $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ oder $f(x) = \sin x$, $g'(x) = x$. Der zweite Ansatz führt in eine Sackgasse, da das entstehende Integral $\int f'(x)g(x) dx$ komplizierter ist als das Ausgangsintegral statt einfacher. Verfolgen wir also den ersten Ansatz: $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$, so dass $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

Was wäre eigentlich passiert, wenn wir mit $g(x) = -\cos x + 1$ statt $-\cos x$ operiert hätten, was ja auch eine Stammfunktion von $\sin x$ ist?

Die eingeschlagene Strategie ist für viele (leider nicht alle) Integrale der Form $\int x \cdot h(x) dx$ erfolgreich.

Satz II.17 (Substitutionsregel)

$$(a) \quad \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

Diese Schreibweise bedeutet: In die Stammfunktion $\int f(u) du$, die eine Funktion von u ist, setze man $\varphi(x)$ für u ein.

(b) Wenn $\varphi(a) = A$ und $\varphi(b) = B$ ist, gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_A^B f(u) du$$

Die Begründung der (ersten Version der) Substitutionsregel geht so: Sei F eine Stammfunktion von f . Die rechte Seite $\int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$ steht dann für $F(\varphi(x))$, und behauptet ist, dass diese Funktion eine Stammfunktion von $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ ist. Das ist aber gerade der Inhalt der Kettenregel:

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Die zweite Version ergibt sich durch Einsetzen der Integrationsgrenzen.

Beachte, dass in der zweiten Version die Grenzen mitsubstituiert werden!

In den meisten Beispielen liest man die Substitutionsregel von links nach rechts; man substituiert $u = \varphi(x)$, um auf das hoffentlich einfachere Integral auf der rechten Seite zu kommen ($\varphi(x)$ wird „wesubstituiert“). Viel seltener liest man von rechts nach links, wenn das Integral links einfacher ist als das rechte, dann muss man $\varphi(x)$ „hineinsubstituieren“, was in der Regel einen Hauch Genialität verlangt. . .

Beispiele für Standardanwendungen sind:

- (1) Integrale der Form $\int f(rx+s) dx$ erledigt man mit der Substitution $u = \varphi(x) = rx+s$; dann ist $\varphi'(x) = r$ und

$$\int f(rx+s) dx = \frac{1}{r} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \frac{1}{r} \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \int \sin(2x+1) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(2x+1) \cdot 2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin u du \Big|_{u=2x+1} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos u \Big|_{u=2x+1} \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(2x+1) \\
 \int_0^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int_0^2 e^{3x} \cdot 3 dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^6 e^u du \\
 &= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^6 \\
 &= \frac{1}{3} (e^6 - 1)
 \end{aligned}$$

- (2) Integrale der Form $\int f(rx^2 + s) \cdot x dx$ erledigt man mit der Substitution $u = \varphi(x) = rx^2 + s$; dann ist $\varphi'(x) = 2rx$ und

$$\int f(rx^2 + s) \cdot x dx = \frac{1}{2r} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \frac{1}{2r} \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=x^2+1} \\
 &= \frac{1}{2} \ln u \Big|_{u=x^2+1} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1)
 \end{aligned}$$

Bei der Anwendung der Substitutionsregel ist die Leibnizsche Symbolik für die Ableitung sehr nützlich. Leibniz schreibt nämlich für die Ableitung einer Funktion $u = \varphi(x)$ den „Differentialquotienten“ (was immer das sein mag)

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x).$$

Tut man so, als dürfe man nach du auflösen, erhält man

$$du = \varphi'(x) dx,$$

und die Substitutionsregel erscheint als Selbstverständlichkeit:

$$\int f(\underbrace{\varphi(x)}_u) \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \int f(u) du.$$

Es folgen zwei Anwendungen der Integralrechnung.

(1) Massenberechnung bei variabler Dichte.

Im allgemeinen ist die Dichte ρ eines Körpers nicht konstant, sondern eine Funktion der drei Ortskoordinaten x , y und z . Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass ρ nur in z -Richtung variiert, also nicht von x oder y abhängt.

Um die Masse des Körpers zu bestimmen, schneiden wir ihn mit einer zur x - y -Ebene parallelen Ebene in der Höhe z ; das ergibt einen Querschnitt, dessen Flächeninhalt mit $q(z)$ bezeichnet werde. In einer dünnen Schicht der Dicke Δz in der Höhe z bleibt nun ρ annähernd konstant gleich $\rho(z)$. In dieser Schicht ist also ungefähr die Masse $\rho(z)q(z)\Delta z$ enthalten, denn $q(z)\Delta z$ ist annähernd das Volumen dieser Schicht. Macht man die Schichten immer dünner, dann strebt die Summe all dieser angenäherten Massenanteile gegen das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} \rho(z)q(z) dz,$$

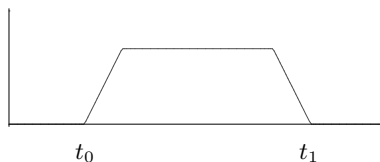
welches die Gesamtmasse des Körpers ist. (Dabei ist z_0 bzw. z_1 die kleinste bzw. die größte z -Koordinate der Punkte des Körpers.)

Konkreteres Beispiel: In einer Emulsion, die ein zylindrisches Gefäß mit Querschnittsfläche q bis zur Höhe h füllt, schweben Teilchen einer gewissen Substanz. In der Höhe z über dem Boden des Gefäßes sei die Dichte der Substanz gleich $\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta z}$ (in g/cm^3). Die Menge der in der Emulsion enthaltenen Substanz ist dann nach der obigen Formel

$$\int_0^h \rho(z)q dz = \rho_0 q \int_0^h e^{-\beta z} dz = \rho_0 q \left(-\frac{1}{\beta} \right) e^{-\beta z} \Big|_0^h = \frac{\rho_0 q}{\beta} (1 - e^{-\beta h}).$$

(2) Mittlere Reaktionsgeschwindigkeit.

Ein chemischer Prozess verlaufe mit einer Reaktionsgeschwindigkeit $c(t)$, die sich gemäß folgendem Diagramm ändert:



Die umgesetzte Stoffmenge beträgt dann

$$M = \int_{t_0}^{t_1} c(t) dt$$

(Begründung wie unter (1)), und die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit beträgt

$$\bar{c} = \frac{M}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} c(t) dt.$$

Konkretes Beispiel: t werde in Sekunden und $c(t)$ in mol/Sekunde gemessen. Es sei $t_0 = 0$, $t_1 = 10$; ferner

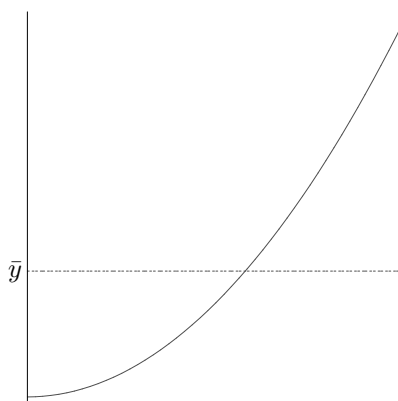
$$c(t) = \begin{cases} 0.1t & : 0 \leq t < 2 \\ 0.2 & : 2 \leq t < 8 \\ 0.1(10 - t) & : 8 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{10} c(t) dt = \int_0^2 0.1t dt + \int_2^8 0.2 dt + \int_8^{10} 0.1(10-t) dt \\ &= 0.1 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + 0.2t \Big|_2^8 + (-1) \cdot 0.1 \cdot \frac{(10-t)^2}{2} \Big|_8^{10} \\ &= 0.2 + 1.2 + 0.2 = 1.6 \end{aligned}$$

und $\bar{c} = M/10 = 0.16$; die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit beträgt 0.16 mol/Sekunde.

Man kann generell $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ als Mittelwert \bar{y} der Funktion f interpretieren:



$$\bar{y} \cdot (b-a) = \int_a^b f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Nach Konstruktion liegt genau soviel Fläche über der Geraden durch \bar{y} und unter dem Graphen wie unter der Geraden und über dem Graphen.

Noch eine Dimensionsbetrachtung: Da das Integral $\int_a^b f(x) dx$ Grenzwert von Summen $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x$ ist, ist seine Dimension = (Dimension von $f(x)$) · (Dimension von x); vergleiche die obige Anwendung. Für die Dimension der Ableitung gilt aus einem analogen Grund: Dimension von $f'(x) = (\text{Dimension von } f(x)) / (\text{Dimension von } x)$.

Es fehlt jetzt noch eine Ausdehnung des Begriffs des bestimmten Integrals. Bis jetzt haben wir immer Funktionen integriert, die auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ erklärt waren. Es sind aber auch Situationen zu behandeln, wo das Intervall bis $+\infty$ oder $-\infty$ reicht oder die Funktion an einem der Randpunkte nicht erklärt ist (zum Beispiel $1/x$ auf $(0, 1]$). Man erklärt nun folgende *uneigentlichen Integrale*:

- Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (stückweise) stetig. Dann setzt man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert (in \mathbb{R}) existiert. Man sagt dann, dass das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ existiert.

- Analog wird $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ erklärt.
- Sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (stückweise) stetig. Dann setzt man

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^b f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert (in \mathbb{R}) existiert. Wieder sagt man, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ existiert.

- Analog wird der Fall $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ behandelt.
- Es kommen auch Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ vor; diese sind als $\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$ erklärt.

Alle Rechenregeln von oben gelten für uneigentliche Integrale genauso. Beispiele:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - e^{-\beta}) = 1$$

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ existiert nicht, da}$$

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\beta} = \ln \beta - \ln 1 = \ln \beta \rightarrow \infty \quad \text{für } \beta \rightarrow \infty.$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ existiert auch nicht, da}$$

$$\int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \ln 1 - \ln \alpha \rightarrow +\infty \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\alpha}) = 2.$$

$$(5) \quad \text{Für die Statistik ist das Integral}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

wichtig (Gaußsche Normalverteilung), dessen Wert hier ohne Beweis mitgeteilt sei.

Kapitel III

Differentialgleichungen

III.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Auf Seite 15 hatten wir ein diskretes Wachstumsmodell, das die Modellannahmen „Zuwachs ist proportional zum Bestand“ ausdrückt, aufgestellt:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n$$

Wir wollen jetzt ein analoges kontinuierliches Modell aufstellen. Gesucht ist also eine Funktion $y = y(t)$ (die unabhängige Variable wird mit t bezeichnet, da sie die Zeit darstellt), für die „Zuwachs der Funktion zum Zeitpunkt t ist proportional zu $y(t)$ “ gilt. Aus Kapitel II wissen wir, dass die Ableitung $y'(t)$ den Zuwachs reflektiert, daher erhalten wir die Gleichung

$$y'(t) = ry(t) \quad \text{für alle } t$$

oder kürzer

$$y' = ry. \tag{III.1}$$

Dies ist ein Beispiel einer *Differentialgleichung*; das ist eine Gleichung zwischen Funktionen und ihren Ableitungen. Die Lösung einer solchen Gleichung ist also eine Funktion (und keine Zahl). Die Gleichung (III.1) wird lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung genannt: linear, da y nur in der 1. Potenz auftritt, homogen im Gegensatz zur inhomogenen Gleichung, die wir auf Seite 42f. studieren, und 1. Ordnung, da nur die 1. Ableitung auftritt.

Ist in (III.1) $r > 0$, so haben wir echtes Wachstum; ist $r < 0$, so haben wir „negatives Wachstum“, also Zerfall. (III.1) ist die einfachste Weise, einen Wachstums- oder Zerfallsprozess zu modellieren.

Eine Lösung von (III.1) ist leicht zu erraten, nämlich $y(t) = e^{rt}$ (beachte den qualitativ unterschiedlichen Verlauf der Graphen dieser Funktionen, je nachdem, ob $r > 0$ oder $r < 0$). Aber auch $2e^{rt}$, $\frac{7}{3}e^{rt}$, $-\pi e^{rt}$ etc. sind Lösungen; allgemein ist für jede Konstante c die Funktion $y(t) = ce^{rt}$ eine Lösung. Wir werden sehen, dass es keine anderen Lösungen gibt.

Satz III.1 *Jede Funktion der Gestalt $y(t) = ce^{rt}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (III.1), und jede Lösung hat diese Gestalt.*

Es ist klar, dass für $y(t) = ce^{rt}$ gilt $y'(t) = cre^{rt} = ry(t)$; es bleibt also, den zweiten Teil des Satzes zu begründen. Sei dazu y eine Lösung; wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi(t) = \frac{y(t)}{e^{rt}}.$$

Dann gilt nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{y'(t)e^{rt} - y(t)re^{rt}}{e^{2rt}} \\ &= \frac{ry(t)e^{rt} - y(t)re^{rt}}{e^{2rt}} \quad (\text{da } y' = ry) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nach Satz II.8 ist φ eine Konstante, d.h.

$$\frac{y(t)}{e^{rt}} = c,$$

folglich $y(t) = ce^{rt}$, wie behauptet.

Die Differentialgleichung (III.1) besitzt also keine eindeutige Lösung, sondern eine Schar von Lösungen. In konkreten Wachstumsprozessen ist in der Regel außer dem Modell, ausgedrückt durch die Differentialgleichung (III.1), auch der Anfangsbestand, ausgedrückt durch die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ (zum Beispiel $y(0) = 10$ oder $y(0) = 9500$ etc.), bekannt. Man spricht dann von dem *Anfangswertproblem* (kurz: AWP)

$$y' = ry, \quad y(0) = y_0. \quad (\text{III.2})$$

Unter allen Lösungen der Differentialgleichung (III.1) gibt es nun genau eine, die auf die Anfangsbedingungen passt, nämlich die zu $c = y_0$. Daher:

Satz III.2 *Das AWP (III.2) hat die eindeutige Lösung $y(t) = y_0e^{rt}$.*

Auf Seite 16 hatten wir ein raffinierteres diskretes Wachstumsmodell kennengelernt, das einen zusätzlichen konstanten Zu- bzw. Abgangsterm enthält:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n + d.$$

Das analoge kontinuierliche Modell lautet

$$y' = ry + d \quad (\text{III.3})$$

Der konstante Term d wird Inhomogenität und die Differentialgleichung (III.3) lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung genannt. Viele konkrete Probleme führen auf eine Gleichung diesen Typs; zum Beispiel in der Chemie: Beim Verlauf einer chemischen Reaktion 1. Ordnung $A \rightleftharpoons B$ mit zwei Komponenten (zum Beispiel Dissoziation in stark verdünnten Lösungen) bezeichne $c(t)$ die Konzentration des Ausgangsstoffes A und c_s die Sättigungskonzentration von A ; der Verlauf der Reaktion wird dann durch die Differentialgleichung

$$c' = k(c_s - c) = -kc + kc_s$$

der Form (III.3) beschrieben.

Die Differentialgleichung (III.3) ist nicht ganz so leicht zu lösen wie (III.1); wir können aber (III.3) mit folgender Beobachtung auf (III.1) zurückführen:

- Je zwei Lösungen von (III.3) unterscheiden sich durch eine Lösung von (III.1).

Mit anderen Worten: Sind y_1 und y_2 Lösungen von (III.3) und setzt man $z = y_2 - y_1$ (so dass $y_2 = y_1 + z$), so löst z die Differentialgleichung (III.1). Das ist einfach, denn

$$z' = (y_2 - y_1)' = y_2' - y_1' \stackrel{(\text{III.3})}{=} (ry_2 + d) - (ry_1 + d) = r(y_2 - y_1) = rz.$$

Wir brauchen also nur eine einzige Lösung y_1 von (III.3) zu finden, alle anderen ergeben sich dann nach Satz III.1 in der Form $y_1(t) + ce^{rt}$.

Wir versuchen nun herauszufinden, ob (III.3) eine konstante Lösung besitzt. Solch eine Lösung heißt stationäre Lösung (oder Gleichgewichtslösung). Für eine stationäre Lösung y_{stat} muss ja $y'_{\text{stat}} = 0$ sein, daher sind stationäre Lösungen von (III.3) durch

$$0 = ry_{\text{stat}} + d$$

gekennzeichnet, was zeigt, dass $y_{\text{stat}} = -\frac{d}{r}$ die einzige stationäre Lösung ist (falls $r \neq 0$). Daher gilt:

Satz III.3 *Ist $r \neq 0$, so sind genau die Funktionen $y(t) = ce^{rt} - \frac{d}{r}$, $c \in \mathbb{R}$, die Lösungen der Differentialgleichung (III.3).*

Dass dies Lösungen sind, bestätigt man durch Nachrechnen; dass es keine anderen Lösungen gibt, zeigen die obigen Überlegungen.

Welches c würde auf die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ passen? Dazu muss offenbar

$$y_0 = c - \frac{d}{r},$$

also $c = y_0 + \frac{d}{r}$ sein. Daher:

Satz III.4 *Ist $r \neq 0$, so ist $y(t) = (y_0 + \frac{d}{r})e^{rt} - \frac{d}{r}$ die eindeutig bestimmte Lösung des AWP $y' = ry + d$, $y(0) = y_0$.*

Man beachte, dass im Fall $r < 0$ für diese Lösung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\frac{d}{r}$$

gilt, unabhängig vom Anfangswert y_0 .

III.2 Die logistische Differentialgleichung

Das ungebremste exponentielle Wachstum, das im Fall $r > 0$ aus der Differentialgleichung (III.1) folgt, ist in der Regel nur für „kleine“ t -Werte realistisch. Um dem Rechnung zu tragen, sind verfeinerte Wachstumsmodelle erdosen worden. Statt der Gleichung $y' = ry$ betrachtet man eine ähnliche Gleichung, in der r nicht konstant ist, sondern ebenfalls von y abhängt. Ein naheliegender Ansatz geht so: Wir nehmen an, dass die durch y beschriebene Population einen begrenzten Lebensraum L zur Verfügung hat und dass der tatsächlich bewohnte Lebensraum zur Größe der Population proportional ist:

$$\text{bewohnter Lebensraum} = \alpha y,$$

daher

$$\text{freier Lebensraum} = L - \alpha y.$$

Es ist nun plausibel, die Wachstumsrate $r = r(y)$ als proportional zum freien Lebensraum anzusetzen:

$$r = \beta(L - \alpha y).$$

Das führt zur Differentialgleichung

$$y' = \beta(L - \alpha y)y.$$

Schreiben wir

$$k = \alpha\beta, \quad R = \frac{L}{\alpha},$$

bzw.

$$A = \beta L, \quad B = \alpha\beta,$$

so nimmt die Differentialgleichung die Form

$$y' = k(R - y)y \quad (k, R > 0) \quad (\text{III.4})$$

bzw.

$$y' = Ay - By^2 \quad (A, B > 0) \quad (\text{III.5})$$

an. Diese (äquivalenten) Differentialgleichungen werden *logistische Differentialgleichung* genannt¹.

Um die logistische Differentialgleichung zu lösen, benutzen wir einen Trick, um die Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung zurückzuführen. Wir dividieren (III.5) durch y^2 und erhalten

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{A}{y} - B.$$

Setzt man $z = \frac{1}{y}$, erkennt man auf der linken Seite $-z'$ und auf der rechten $Az - B$. Daher erfüllt die Funktion z die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$z' = -Az + B;$$

nach Satz III.3 hat z die Gestalt

$$z(t) = ce^{-At} + \frac{B}{A}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die Lösungen von (III.5) sind also (außer $y = 0$)

$$y(t) = \frac{1}{ce^{-At} + \frac{B}{A}} = \frac{A}{cAe^{-At} + B}.$$

Um den Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$ zu befriedigen, ist c so zu bestimmen, dass

$$y_0 = \frac{A}{cA + B}$$

ist, also

$$c = \frac{1}{y_0} - \frac{B}{A}.$$

Diese Ergebnisse lassen sich leicht in die Form (III.4) umrechnen. Wegen $A = kR$ und $B = k$ erhält man:

Satz III.5 Die eindeutig bestimmte Lösung von

$$y' = k(R - y)y, \quad y(0) = y_0 \quad (k, R, y_0 > 0)$$

lautet

$$y(t) = \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{y_0} - 1\right)e^{-kRt}}.$$

¹Das hat weder etwas mit Logik noch mit Logistik zu tun, sondern kommt von dem französischen Wort *logis*.

Wir wollen den Verlauf der Graphen dieser Funktionen für den Fall $0 < y_0 < R$ bestimmen (dies ist der für die Anwendung wichtige Fall; siehe unten). Dann ist

$$b := \frac{R}{y_0} - 1 > 0,$$

und unsere Lösung lautet

$$y(t) = \frac{R}{1 + be^{-kRt}} \quad (b, k, R > 0).$$

Aus $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-kRt} = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kRt} = 0$ folgt als erstes

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R;$$

wir haben also kein unbegrenztes Wachstum, sondern einen endlichen Grenzwert. Um das Monotonieverhalten zu entscheiden, untersuchen wir die Ableitung von y . Diese ist nach der Quotientenregel

$$y'(t) = \frac{-Rbe^{-kRt} \cdot (-kR)}{(1 + be^{-kRt})^2} = \frac{bkR^2 e^{-kRt}}{(1 + be^{-kRt})^2} > 0;$$

nach Satz II.9 ist y streng monoton wachsend. Wir können noch das Krümmungsverhalten mit Hilfe der 2. Ableitung untersuchen. Es wäre etwas mühselig, y' zu differenzieren, um y'' zu erhalten; einfacher ist es, (III.4) zu differenzieren. Das liefert (Kettenregel)

$$y'' = k[(R - y)y]' = k[Ry - y^2]' = k[R - 2y]y'.$$

Uns interessiert, wann $y''(t) > 0$ bzw. $y''(t) < 0$ ist. Das ist jetzt leicht, denn wir haben gerade gesehen, dass stets $y' > 0$ gilt:

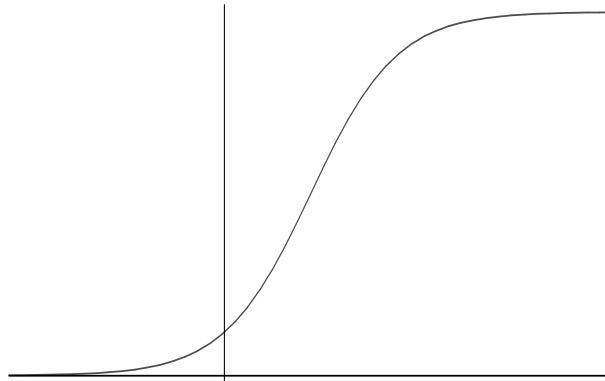
$$\begin{aligned} y''(t) > 0 &\Leftrightarrow R - 2y(t) > 0 \quad (\text{da } k > 0 \text{ und } y' > 0) \\ &\Leftrightarrow y(t) < \frac{R}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 + be^{-kRt} > 2 \\ &\Leftrightarrow e^{-kRt} > \frac{1}{b} \\ &\Leftrightarrow -kRt > -\ln b \\ &\Leftrightarrow t < \frac{\ln b}{kR} =: t^* \end{aligned}$$

Genauso:

$$\begin{aligned} y''(t) < 0 &\Leftrightarrow t > t^* \\ y''(t) = 0 &\Leftrightarrow t = t^* \end{aligned}$$

Im Intervall $(-\infty, t^*)$ ist der Graph von y linksgekrümmt, im Intervall (t^*, ∞) ist er rechtsgekrümmt (nach Satz II.10); bei t^* liegt ein Wendepunkt vor.

Der Graph von y sieht also so aus:



Man spricht vom S-förmigen oder vornehmer sigmoiden Verlauf des Graphen. Man erkennt, dass R die maximal mögliche Größe der Population ist, weswegen der Fall $0 < y_0 < R$ der naturwissenschaftlich relevante ist (was auch aus dem Ansatz von Seite 43 folgt). Übrigens sieht man sofort, dass $y = 0$ und $y = R$ die stationären Lösungen von (III.4) sind.

III.3 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Wir kommen jetzt zum Lösungsverfahren für die Differentialgleichung

$$y' = f(t) \cdot g(y), \quad (\text{III.6})$$

die sogenannte *Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen*. Hier seien f und g differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungen². Ein wichtiger Spezialfall ist, wenn f die konstante Funktion $f = 1$ ist; dann lautet (III.6) nämlich einfach

$$y' = g(y).$$

Nimmt g den Wert 0 nie an, ist (III.6) äquivalent zu

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \quad \text{für alle } t. \quad (\text{III.7})$$

Sei H eine Stammfunktion von $1/g$; dann ist nach der Kettenregel die linke Seite von (III.7) nichts anderes als die Ableitung von $H \circ y$. Bezeichnet F eine beliebige Stammfunktion von f , so wird aus (III.7)

$$H(y(t)) = F(t) + \tilde{c} \quad \text{für alle } t \quad (\text{III.8})$$

mit einer Konstanten \tilde{c} . Im letzten Schritt des Verfahrens versuche man nun, (III.8) nach y aufzulösen, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (III.6) zu bestimmen.

Hat jedoch g eine Nullstelle, etwa $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(t) = y_0$ eine Lösung.

Dass man mit diesem Verfahren alle Lösungen bekommt, lernt man in Mathematikvorlesungen über Differentialgleichungen. Das liefert, dass das AWP

$$y' = f(t) \cdot g(y), \quad y(0) = y_0$$

für stetig differenzierbare Funktionen f und g nach dem obigen Verfahren eindeutig lösbar ist.

Mathematische Nebenbemerkung: Das AWP

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

ist *nicht* eindeutig lösbar; es sind nämlich

$$y(t) = \frac{1}{27}t^3 \quad \text{und} \quad y(t) = 0$$

beides Lösungen. [Das ist kein Widerspruch zur obigen Aussage, da $g(y) = y^{2/3}$ bei 0 nicht differenzierbar ist.]

Das Lösungsverfahren für (III.6) kann man sich leicht merken, wenn man die Leibnizsche Notation $y' = \frac{dy}{dt}$ verwendet und damit sorglos wie mit einem Bruch rechnet. Dann lauten

²Man sagt kurz, dass f und g *stetig differenzierbar* sind.

die Schritte:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \\ \frac{1}{g(y)} dy &= f(t) dt \quad [\text{was immer das heißen mag...}] \\ \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(t) dt \\ H(y) &= F(t) + \tilde{c}, \end{aligned}$$

und diese Gleichung muss man nach y auflösen.

Will man zusätzlich die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ befriedigen, muss man die Konstante \tilde{c} so wählen, dass $H(y_0) = F(t_0) + \tilde{c}$ ist. Etwas direkter ist es, statt der unbestimmten Integration eine bestimmte Integration auszuführen:

$$\int_{y_0}^y \frac{dw}{g(w)} = \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

Dann kommt die Konstante gleich richtig heraus.

Beispiele. (1) Nochmals $y' = y$. Diese Gleichung ist von der Form (III.6) mit $f(t) = 1$, $g(y) = y$. Wir wenden das „Kochrezept“ von oben an:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{1}{y} dy &= dt \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int dt \\ \ln |y| &= t + \tilde{c} \\ |y| &= e^{\tilde{c}} \cdot e^t \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist stets $\neq 0$, also ist entweder immer $y(t) > 0$ oder $y(t) < 0$. Im ersten Fall setzen wir $c = e^{\tilde{c}}$, im zweiten $c = -e^{\tilde{c}}$, dann ergibt sich die uns schon bekannte allgemeine Lösung

$$y(t) = c e^t.$$

Dieses Kochrezept liefert nur Lösungen mit $c \neq 0$; der noch fehlende Fall $y = 0$ korrespondiert mit der Nullstelle von g .

(2) Die Differentialgleichung $y' = -y^2$. Hier ist $f(t) = 1$, $g(y) = -y^2$; also

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} = -y^2 \\ \frac{1}{-y^2} dy &= dt \\ \int \frac{1}{-y^2} dy &= \int dt \\ \frac{1}{y} &= t + \tilde{c} \\ y(t) &= \frac{1}{t + \tilde{c}}. \end{aligned}$$

Will man das AWP $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ lösen, muss man die Konstante \tilde{c} der Anfangsbedingung anpassen. Das liefert hier $\tilde{c} = 1$ und die Lösung $y(t) = \frac{1}{t+1}$.

Alternativ kann man die Methode der bestimmten Integration verwenden und erhält

$$\begin{aligned} \int_1^y \frac{1}{-w^2} dw &= \int_0^t ds \\ \frac{1}{w} \Big|_1^y &= s \Big|_0^t \\ \frac{1}{y} - 1 &= t \\ y(t) &= \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zu einer Verallgemeinerung der Gleichung $y' = ry$. Seien $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen; betrachte die Differentialgleichung

$$y' = a(t)y \tag{III.9}$$

bzw.

$$y' = a(t)y + b(t). \tag{III.10}$$

(III.9) wird homogene, (III.10) inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung genannt. Für das Lösungsverhalten gilt:

1. Je zwei Lösungen von (III.10) unterscheiden sich um eine Lösung von (III.9).
2. Ist y_I eine Lösung von (III.10) und y_H eine Lösung von (III.9), so ist $y_H + y_I$ eine Lösung von (III.10).

(Begründung: Einsetzen und nachrechnen, wie bei • auf Seite 42!)

Daher: Allgemeine Lösung von (III.10) = partikuläre³ Lösung von (III.10) + allgemeine Lösung von (III.9).

Die allgemeine Lösung von (III.9) können wir mit der Methode der Trennung der Veränderlichen bestimmen:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} = a(t)y \\ \frac{dy}{y} &= a(t) dt \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int a(t) dt \end{aligned}$$

Ist A eine Stammfunktion von a , können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \ln |y| &= A(t) + \tilde{c} \\ |y| &= e^{\tilde{c}} e^{A(t)} \\ y &= c \cdot e^{A(t)} \end{aligned}$$

Daher ist die allgemeine Lösung von (III.9) $y = c \cdot e^{A(t)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Irgendeine Lösung von (III.10) zu finden ist erheblich schwerer als im Fall konstanter Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$; vgl. Satz III.3. Man macht den genialen Ansatz der *Variation der Konstanten*, d.h. man versucht, eine Lösung von (III.10) der Form

$$y = c(t)e^{A(t)} \quad (\text{mit } A' = a)$$

³D.h. irgendeine Lösung von (III.10).

zu finden. Wie muss die Funktion c dann beschaffen sein? Man rechnet

$$\begin{aligned} & (c \cdot e^A)' = a(ce^A) + b \\ \Leftrightarrow & c'e^A + c \underbrace{A'}_{=a} e^A = a(ce^A) + b \\ \Leftrightarrow & c'e^A = b \\ \Leftrightarrow & c' = be^{-A} \end{aligned}$$

Die Funktion c ist also als Stammfunktion zu be^{-A} zu wählen. Eine partikuläre Lösung von (III.10) kann daher in der Form

$$y_I(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \cdot e^{A(t)} = \int_{t_0}^t b(s)e^{A(t)-A(s)} ds$$

angegeben werden.

Ein Beispiel: Finde die allgemeine Lösung von

$$y' = 2ty + t^3.$$

Es ist also $a(t) = 2t$, $b(t) = t^3$ und daher $A(t) = t^2$ (oder allgemeiner $A(t) = t^2 + \tilde{c}$). Wir rechnen

$$\int b(s)e^{-A(s)} ds = \int s^3 e^{-s^2} ds$$

Dieses Integral auszuwerten ist etwas trickreich. Wir benötigen

$$\begin{aligned} \int se^{-s^2} ds &= \int se^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-z} dz \quad (\text{Substitution } z = s^2, dz = 2s ds) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-z} \Big|_{z=s^2} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-s^2}. \end{aligned}$$

Nun können wir mittels partieller Integration das gesuchte Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \int s^3 e^{-s^2} ds &= \int \underbrace{s^2}_{u(s)} \cdot \underbrace{se^{-s^2}}_{v'(s)} ds \\ &= \underbrace{s^2}_{u(s)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right)}_{v(s)} - \int \underbrace{2s}_{u'(s)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right)}_{v(s)} ds \quad (\text{siehe oben}) \\ &= -\frac{1}{2}s^2 e^{-s^2} + \int se^{-s^2} ds \\ &= -\frac{1}{2}s^2 e^{-s^2} - \frac{1}{2}e^{-s^2} \quad (\text{siehe oben}) \\ &= -\frac{1}{2}(s^2 + 1)e^{-s^2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$y_I(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 1)e^{-t^2} \cdot e^{A(t)} = -\frac{1}{2}(t^2 + 1)$$

eine partikuläre Lösung, und die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 1) + ce^{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

III.4 Komplexe Zahlen

In diesem Abschnitt lernen Sie die komplexen Zahlen kennen. Bekanntlich haben manche quadratischen Gleichungen wie

$$x^2 + 1 = 0$$

oder

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

keine Lösung $x \in \mathbb{R}$. Das passiert immer dann, wenn in der p - q -Formel für die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

also in der Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

die die Lösungen dieser Gleichung angibt, der Term unter der Wurzel negativ ist, und die Wurzel aus einer negativen Zahl gibt es nun mal nicht, zumindest nicht in der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Seit Jahrhunderten rechnet man daher auch mit einer erweiterten Zahlenmenge \mathbb{C} der „komplexen Zahlen“, in der auch solche Wurzeln existieren.

Man beginnt mit der Postulierung einer „imaginären Einheit“ i , die als Symbol für $\sqrt{-1}$ steht:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{bzw.} \quad i^2 = -1.$$

Obwohl es keine reelle Zahl mit dieser Eigenschaft gibt, kann man mit Hilfe von i *komplexe Zahlen*

$$z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

erzeugen, mit denen man genauso wie mit reellen Zahlen rechnet. Zum Beispiel ist

$$(3 + 4i) + (2 - i) = 3 + 2 + 4i - i = 5 + 3i,$$

$$(3 + 4i) \cdot (2 - i) = 6 + 8i - 3i + \underbrace{(4i)(-i)}_{=-4i^2 = -4 \cdot (-1) = 4} = 10 + 5i.$$

Allgemein ist

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + b_1a_2i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i.$$

Man kann auch dividieren, nämlich mit folgendem Trick:

$$\frac{3 + 4i}{2 - i} = \frac{3 + 4i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$$

Hier ist der Nenner nach der binomischen Formel eine reelle Zahl, nämlich

$$(2 - i)(2 + i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5,$$

und es ist (siehe oben)

$$(3 + 4i)(2 + i) = (6 - 4) + (8 + 3)i = 2 + 11i.$$

Daher:

$$\frac{3 + 4i}{2 - i} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

(Im allgemeinen Fall besteht der Trick darin, $\frac{a + bi}{c + di}$ mit $\frac{c - di}{c - di}$ zu erweitern; das macht wie im Beispiel den Nenner reell.)

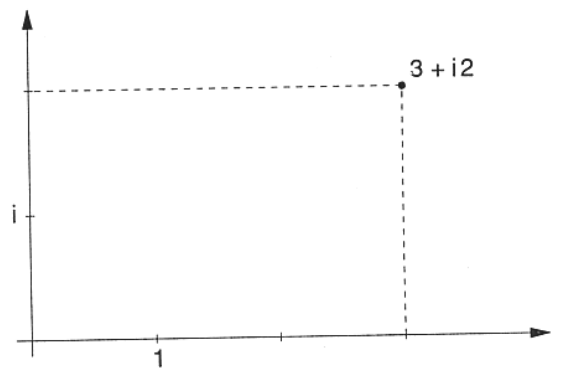
Es wurde schon erwähnt, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen den üblichen Regeln folgt (das wurde auf der letzten Seite schon ausgenutzt); zum Beispiel ist für komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

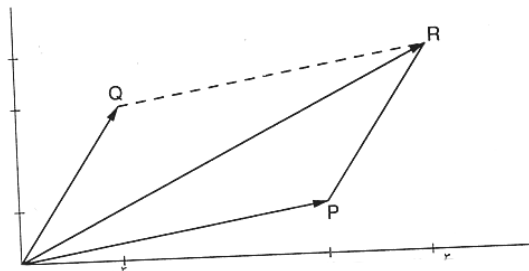
Und mit komplexen Zahlen kann man alle quadratischen Gleichungen lösen, zum Beispiel hat $x^2 + 4x + 13 = 0$ die Lösungen

$$-2 \pm \sqrt{2^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3\sqrt{-1} = -2 \pm 3i.$$

Komplexe Zahlen $z = a + bi$ stellt man sich als Punkte in der *Gaußschen Zahlenebene* vor. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ nennt man a den Realteil und b den Imaginärteil (beides sind reelle Zahlen). Man kann sich z als Punkt mit den Koordinaten (a, b) vorstellen, zum Beispiel



Noch besser ist es, an einen *Vektor* mit den Koordinaten (a, b) zu denken; die Addition komplexer Zahlen entspricht dann genau der Addition der Vektoren:



(Die Multiplikation ist schwieriger zu veranschaulichen.)

Die Länge des zu $z = a + bi$ gehörigen Vektors nennt man den *Betrag* von z , in Zeichen

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wie bei reellen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt benötigen wir die Exponentialfunktion im Komplexen. Was also könnte e^z für $z \in \mathbb{C}$ sein? Die Antwort der Mathematik auf diese Frage ist: Man nehme die Exponentialreihe von Seite 30 und setze dort statt der reellen Zahl x eine komplexe Zahl z ein:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{III.11})$$

(Ich überschlage hier, dass diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, und sogar die Details des Begriffs der Konvergenz in \mathbb{C} werden komplett übergangen.)

Ein sehr wichtiger Spezialfall von (III.11) führt uns nun in bekanntes Fahrwasser zurück, nämlich der Fall einer „rein imaginären“ Zahl $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$. Dafür ist

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots \quad (\text{III.12})$$

Wir untersuchen die Potenzen von ix genauer. Zuerst zu den geraden Potenzen: Ist $k = 4n$ durch 4 teilbar, ist

$$(ix)^k = i^{4n} x^{4n} = x^{4n} = x^k;$$

ist $k = 4n + 2$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar, ist

$$(ix)^k = (ix)^{4n} (ix)^2 = x^{4n} \cdot (-1) \cdot x^2 = -x^{4n+2} = -x^k.$$

Bei den ungeraden Potenzen unterscheide $k = 4n + 1$ und $k = 4n + 3$:

$$(ix)^{4n+1} = (ix)^{4n} \cdot ix = i \cdot x^{4n+1} = ix^k$$

$$(ix)^{4n+3} = (ix)^{4n} \cdot (ix)^3 = i^3 \cdot x^{4n+3} = -ix^k$$

Setzt man das in (III.12) ein, bekommt man

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} \pm \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \right) \\ &= \cos x + i \cdot \sin x \quad (\text{vgl. Seite 30}) \end{aligned}$$

Das ist die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

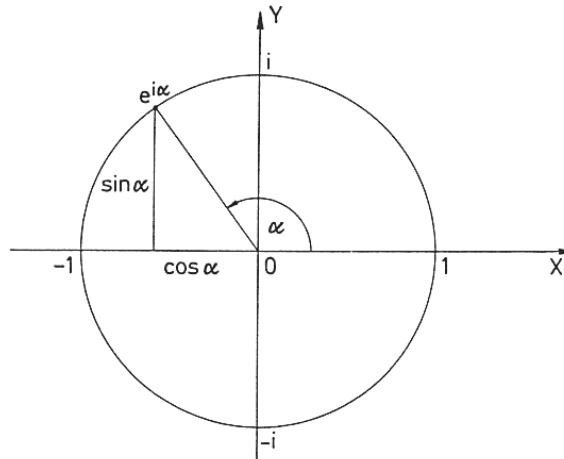
Spezialfälle sind

$$e^{\pi i} = -1 \quad \text{und} \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Stets gilt

$$|e^{ix}| = 1,$$

da $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Geometrisch heißt das, dass e^{ix} für $x \in \mathbb{R}$ auf dem Rand des Einheitskreises in der Gaußschen Zahlenebene liegt.



III.5 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist von der Form

$$ay'' + by' + cy = f(t). \quad (\text{III.13})$$

Im Fall $f = 0$ heißt sie wieder homogen, und diese Gleichung, also

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (\text{III.14})$$

wollen wir lösen. (III.14) taucht an vielen Stellen in der Physik auf (aber auch in anderen Naturwissenschaften, siehe Abschnitt III.7). Da die lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung von der e -Funktion gelöst wird, machen wir auch für (III.14) den *Ansatz* $y = e^{\lambda t}$. Dann gilt $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, und wenn $y = e^{\lambda t}$ eine Lösung von (III.14) ist, gilt für alle t

$$0 = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t}.$$

Da $e^{\lambda t}$ stets $\neq 0$ ist, muss notwendig

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (\text{III.15})$$

sein. Die Lösungen von (III.15) lauten bekanntlich

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Es gibt zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (dies ist der Fall $b^2 - 4ac > 0$). Die obige Rechnung funktioniert dann auch rückwärts und zeigt, dass

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

zwei verschiedene Lösungen von (III.14) sind. Nun ist aufgrund der Struktur von (III.14) klar, dass auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist; und in Mathematikvorlesungen lernt man, dass jede Lösung diese Gestalt hat. Es gibt jetzt also eine Lösungsschar mit zwei freien Konstanten, und um eine Lösung zu spezifizieren, braucht man zwei weitere Bedingungen, die häufig als Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (y_0, y'_0 \in \mathbb{R})$$

vorliegen.

2. Es gibt nur eine reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2$ von (III.15) (dies ist der Fall $b^2 - 4ac = 0$). Unser Ansatz liefert dann nur eine Lösung $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ (und ihre reellen Vielfachen). Man bestätigt jedoch durch Nachrechnen, dass

$$y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$$

eine zweite Lösung ist, die kein reelles Vielfaches von y_1 ist. (Man sagt, man habe zwei *linear unabhängige* Lösungen gefunden.) Wieder gilt, dass die allgemeine Lösung die Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ hat.

3. Es gibt keine reelle Lösung von (III.15) (dies ist der Fall $b^2 - 4ac < 0$). In diesem Fall gibt es zwei konjugiert-komplexe Lösungen, die wir in der Form

$$\lambda_1 = k + i\omega, \quad \lambda_2 = k - i\omega$$

mit $k = -\frac{b}{2a}$ und $\omega = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$ schreiben können. Der Ansatz $y = e^{\lambda t}$ führt jetzt also zu einer Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten. Was das ist, wurde in Abschnitt III.4 erklärt. Insbesondere gilt für $k, \omega \in \mathbb{R}$

$$e^{(k+i\omega)t} = e^{kt} \cdot (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t).$$

Um den Ansatz hier zu überprüfen, müssen wir eine komplexe e -Funktion differenzieren. Dazu treffen wir folgende Definition:

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Der Real- bzw. Imaginärteil von f ist die Funktion

$$\operatorname{Re} f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \operatorname{Re} f(t) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im} f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \operatorname{Im} f(t).$$

f heißt differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ es sind. Man setzt dann

$$f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i \cdot (\operatorname{Im} f)'(t).$$

Die üblichen Differentiationsregeln für Summe, Produkt etc. gelten dann auch für komplexwertige Funktionen. Durch Nachrechnen bestätigt man, dass auch für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Um das einzusehen, schreibe die komplexe Zahl λ als $k + i\omega$ mit $k, \omega \in \mathbb{R}$. Dann ist nach der Eulerschen Formel

$$e^{\lambda t} = e^{kt} e^{i\omega t} = e^{kt} \cos \omega t + i e^{kt} \sin \omega t,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} (e^{kt} \cos \omega t) + i \frac{d}{dt} (e^{kt} \sin \omega t) \\ &= (k e^{kt} \cos \omega t - e^{kt} \omega \sin \omega t) + i (k e^{kt} \sin \omega t + e^{kt} \omega \cos \omega t) \\ &= e^{kt} (k (\cos \omega t + i \sin \omega t) + i \omega (\cos \omega t + i \sin \omega t)) \\ &= e^{kt} (k + i\omega) e^{i\omega t} = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Zurück zu unserer Differentialgleichung. Mit λ_1 und λ_2 wie oben gilt also für $f_i(t) = e^{\lambda_i t}$

$$f_i'(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t}, \quad f_i''(t) = \lambda_i^2 e^{\lambda_i t}$$

und

$$af_i''(t) + bf_i'(t) + cf_i(t) = a\lambda_i^2 e^{\lambda_i t} + b\lambda_i e^{\lambda_i t} + ce^{\lambda_i t} = \underbrace{(a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c)}_{=0} e^{\lambda_i t} = 0.$$

Wir haben also diesmal zwei (linear unabhängige) *komplexwertige* Lösungen, und wieder gilt, dass die allgemeine Lösung in der Form $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ darstellbar ist. Aus physikalischen (etc.) Gründen ist man aber an *reellwertigen* Lösungen interessiert. Die erhält man so: Da $a, b, c \in \mathbb{R}$, ist mit einer komplexen Lösung y auch $\operatorname{Re} y$ bzw. $\operatorname{Im} y$ eine (reellwertige!) Lösung, denn wegen $0 = ay'' + by' + cy$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} 0 &= \operatorname{Re}(ay'' + by' + cy) \\ &= \operatorname{Re}(ay'') + \operatorname{Re}(by') + \operatorname{Re}(cy) \\ &= a \operatorname{Re}(y'') + b \operatorname{Re}(y') + c \operatorname{Re} y \quad (\text{wegen } a, b, c \in \mathbb{R}) \\ &= a(\operatorname{Re} y)'' + b(\operatorname{Re} y)' + c(\operatorname{Re} y) \quad (\text{nach obiger Definition}) \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Im} y$ geht die Rechnung analog.

Für $y = e^{\lambda_1 t} = e^{kt}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ (wo $\lambda_1 = k + i\omega$) führt das auf

$$\operatorname{Re} y = e^{kt} \cos \omega t, \quad \operatorname{Im} y = e^{kt} \sin \omega t.$$

Man erhält daraus alle reellwertigen Lösungen in der Form

$$y(t) = c_1 e^{kt} \cos \omega t + c_2 e^{kt} \sin \omega t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Dass es wirklich keine anderen Lösungen gibt, ist wiederum ein Satz, der in Mathematikvorlesungen bewiesen wird.

Was wäre eigentlich passiert, wenn man statt von $e^{\lambda_1 t}$ von $e^{\lambda_2 t}$ ausgegangen wäre?

Zwei Beispiele:

(1) Löse das AWP

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 4.$$

Für den Ansatz muss zuerst (III.15) gelöst werden:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

Die Lösungen lauten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$; also trifft Fall 1 zu. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}.$$

c_1 und c_2 müssen so bestimmt werden, dass $y(0) = -2$ und $y'(0) = 4$ gilt. Wegen $y'(t) = c_1 e^t - 5c_2 e^{-5t}$ führt das auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = -2, \\ y'(0) &= c_1 - 5c_2 = 4. \end{aligned}$$

Subtraktion dieser Gleichungen liefert

$$c_2 - (-5c_2) = -6,$$

d.h.

$$c_2 = -1$$

Aus $c_1 + c_2 = -2$ folgt dann

$$c_1 = -1.$$

Die Lösung des AWP ist daher

$$y(t) = -e^t - e^{-5t}.$$

(2) Löse das AWP

$$\frac{1}{2}y'' - 3y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Hier lautet (III.15)

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Hier sind wir bei Fall 3. Es ist $\lambda_1 = k + i\omega$ mit $k = 3$ und $\omega = 1$, also lautet die Lösung

$$y = c_1 e^{3t} \cos t + c_2 e^{3t} \sin t.$$

Die Bedingung $y(0) = 1$ führt daher auf

$$1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0, \quad \text{d.h. } c_1 = 1.$$

Es ist dann

$$y' = 3e^{3t} \cos t - e^{3t} \sin t + c_2 \cdot 3e^{3t} \sin t + c_2 e^{3t} \cos t$$

Einsetzen von $t = 0$ liefert

$$1 = 3 + c_2, \quad \text{d.h. } c_2 = -2.$$

Die Lösung des AWP lautet daher

$$y = e^{3t} \cos t - 2e^{3t} \sin t = (\cos t - 2 \sin t)e^{3t}.$$

III.6 Schwingungsgleichungen

Wird eine Feder aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, so greift nach dem Hookeschen Gesetz eine Rückstellkraft an, die der Auslenkung y proportional, aber entgegengesetzt ist. Diese beschleunigt eine Probemasse m gemäß dem Newtonschen Kraftgesetz „Kraft = Masse \times Beschleunigung“, was auf die Differentialgleichung ($k > 0$ die Federkonstante)

$$my'' = -ky$$

bzw. mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

führt. Man sieht sofort, dass $y_1(t) = \sin \omega_0 t$ und $y_2(t) = \cos \omega_0 t$ die Gleichung lösen; allgemeiner ist bei beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung, wie wir aus Abschnitt III.5 wissen. Es seien nun Anfangsbedingungen, also eine Anfangsauslenkung s_0 und eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorgelegt. Dann sind c_1 und c_2 so wählbar, dass das AWP

$$y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(t_0) = s_0, \quad y'(t_0) = v_0 \quad (\text{III.16})$$

lösbar ist; wir müssen nämlich nur das lineare Gleichungssystem in c_1 und c_2

$$\begin{aligned} c_1 \sin \omega_0 t_0 + c_2 \cos \omega_0 t_0 &= s_0 \\ c_1 \omega_0 \cos \omega_0 t_0 - c_2 \omega_0 \sin \omega_0 t_0 &= v_0 \end{aligned}$$

lösen, was nicht schwierig ist. Für $t_0 = 0$ ist die Lösung sogar trivial; man sieht nämlich sofort $c_2 = s_0$ und $c_1 = v_0/\omega_0$.

Bei einer gedämpften Schwingung müssen Reibungskräfte, die zur Geschwindigkeit proportional sind, berücksichtigt werden. Im Newtonschen Kraftgesetz taucht dann auf der rechten Seite noch die Reibungskraft $-ry'$ auf:

$$my'' = -ry' - ky.$$

Das führt mit $2p = r/m > 0$ und $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ auf das AWP

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(t_0) = s_0, \quad y'(t_0) = v_0.$$

(Es wird sich als günstig erweisen, die Konstante bei y' als $2p$ statt p zu schreiben.)

Aus Abschnitt III.5 wissen wir, dass wir die Lösung als $e^{\lambda t}$ mit einer möglicherweise komplexen Zahl λ ansetzen können, die die Gleichung

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$$

erfüllt. Wenn diese Gleichung zwei reelle Lösungen $\lambda_{1/2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ hat, kann man bei beliebigen c_1, c_2

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

als Lösung ansetzen, analog dem ungedämpften Fall c_1 und c_2 den Anfangsbedingungen anpassen und auch die Eindeutigkeit der Lösung beweisen. Da in diesem Fall, dem Fall starker Dämpfung $p^2 > \omega_0^2$, die $\lambda_{1/2} < 0$ sind, ist die Lösung stabil ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$), und das ausgelenkte Teilchen „schwingt“ gar nicht im landläufigen Sinn.

Der Fall $p^2 = \omega_0^2$, der in der Physik *aperiodischer Grenzfall* genannt wird, führt auf eine doppelte Nullstelle der Bestimmungsgleichung von λ und nimmt eine Sonderstellung ein. Dann lautet die zweite Lösung te^{-pt} neben e^{-pt} .

Es bleibt der Fall $p^2 < \omega_0^2$, in welchem zwei konjugiert komplexe Nullstellen existieren. Mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ erhalten wir Lösungen als Linearkombinationen von $e^{(-p+i\omega)t}$ und $e^{(-p-i\omega)t}$; das sind jedoch komplexwertige Funktionen. Um reellwertige Lösungen zu erhalten, beachte man, dass Real- und Imaginärteil selbst wieder Lösungen sind, denn die Koeffizienten der Differentialgleichung sind reell. Das führt auf die zweiparametrische Schar reeller Lösungen

$$c_1 e^{-pt} \sin \omega t + c_2 e^{-pt} \cos \omega t. \quad (\text{III.17})$$

Hierbei handelt es sich um „gedämpfte“ Schwingungen.

Betrachten wir nun eine *erzwungene Schwingung*, die von einer periodisch wirkenden äußeren Kraft K erregt wird. Statt der Differentialgleichung

$$my'' + ry' + ky = 0$$

taucht nun auf der rechten Seite der Term $K(t)$ auf. Mit

$$p = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad b = \frac{K}{m}$$

bekommt man die inhomogene Gleichung

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = b(t). \quad (\text{III.18})$$

Der Einfachheit halber nehmen wir eine reine Kosinusschwingung mit der Erregerfrequenz ω_1 an, d.h.

$$b(t) = b_0 \cos \omega_1 t.$$

Wir werden im folgenden den Fall schwacher Dämpfung, d.h. $0 \leq p < \omega_0$, annehmen. Zuerst gehen wir von (III.18) zur komplexifizierten Gleichung

$$z'' + 2pz' + \omega_0^2 z = b_0 e^{i\omega_1 t} \quad (\text{III.19})$$

über; zur Erinnerung $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Der Realteil einer Lösung von (III.19) ist dann eine Lösung von (III.18) für unser b . Wir machen jetzt den Ansatz

$$z(t) = Ae^{i\omega_1 t},$$

um eine partikuläre Lösung von (III.19) zu finden. Daraus erhält man unmittelbar

$$A(-\omega_1^2 + 2p\omega_1 i + \omega_0^2) = b_0. \quad (\text{III.20})$$

Falls die Klammer $\neq 0$ ist, kann man nach A auflösen und erhält eine Lösung von (III.19).

Wir unterscheiden jetzt die Fälle $p = 0$ und $0 < p < \omega_0$. Zuerst zu $p = 0$, d.h. zur ungedämpften Schwingung. Falls $\omega_0 \neq \omega_1$ ist, folgt aus (III.20)

$$A = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2},$$

was eine reelle Zahl ist. Eine partikuläre Lösung von (III.18) ist daher

$$\text{Re}(Ae^{i\omega_1 t}) = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t.$$

Wie bei den linearen Gleichungen 1. Ordnung gilt auch bei linearen Gleichungen 2. Ordnung:

- *Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung = allgemeine Lösung der homogenen Gleichung + partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung,*

wie man durch Einsetzen wie dort nachrechnet.

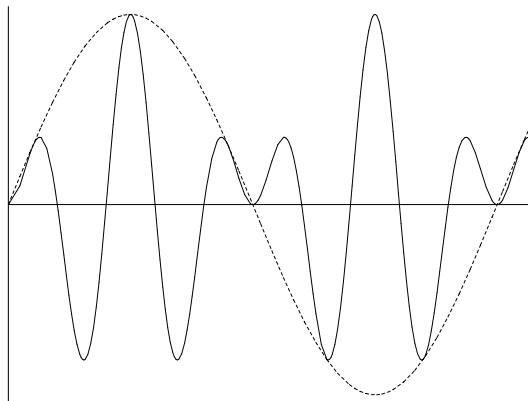
Die allgemeine Lösung lautet jetzt

$$c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t.$$

Ein anfänglich ruhender Massenpunkt ($y(0) = 0, y'(0) = 0$) vollführt, durch die äußere Kraft angeregt, Schwingungen der Form ($c_1 = -b_0/(\omega_0^2 - \omega_1^2), c_2 = 0$)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) = \frac{2b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t \\ &=: A(\omega_1, t) \sin \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t, \end{aligned}$$

sogenannte *amplitudenmodulierte Schwingungen*.



Graph von y und $A(\omega_1, \cdot)$ (gestrichelt)

Im Fall $\omega_0 = \omega_1$, wo die Erregerfrequenz ω_1 mit der *Eigenfrequenz* ω_0 des harmonischen Oszillators übereinstimmt, klappt der Ansatz $z(t) = Ae^{i\omega_1 t}$ nicht, denn (III.20) lautet dann $A \cdot 0 = b_0$. Jetzt muss man eine partikuläre Lösung von (III.18) anders bestimmen. Wir geben nur das Endergebnis an, das mit einer Variante der Methode der Variation der Konstanten (siehe Abschnitt III.3) berechnet wird: Man erhält

$$\frac{b_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{b_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Die Lösung ist unbeschränkt! In der Praxis bedeutet das, dass nach endlicher Zeit die Feder, an der der Massenpunkt hängt, reißen wird. Dieses Phänomen wird *Resonanz* genannt.

Es taucht auch im schwach gedämpften Fall auf, der Schwingungsphänomene realistischer beschreibt. Wir nehmen also jetzt $0 < p < \omega_0$ an. Man kann dann (III.20) stets nach A auflösen, da der Imaginärteil der Klammer $\neq 0$ ist. Das liefert die partikuläre Lösung

$$z(t) = \frac{b_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2p\omega_1 i} e^{i\omega_1 t} = b_0 \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2p\omega_1 i}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2} (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) \quad (\text{III.21})$$

von (III.19), deren Realteil

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2)b_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{2p\omega_1 b_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2} \sin \omega_1 t \quad (\text{III.22})$$

eine partikuläre Lösung von (III.18) darstellt. Wir wollen diesen Term vereinfachen. Dazu beachte man mit $a^2 = a_1^2 + a_2^2$

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha &= a \left(\frac{a_1}{a} \cos \alpha + \frac{a_2}{a} \sin \alpha \right) \\ &= a (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = a \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

für ein φ , denn $(a_1/a)^2 + (a_2/a)^2 = 1$. Also wird aus (III.22)

$$\frac{b_0}{((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2)^{1/2}} \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

und die allgemeine Lösung von (III.18) lautet

$$y(t) = e^{-pt} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + \frac{b_0}{((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2)^{1/2}} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (\text{III.23})$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ wie in (III.17).

Da der erste Term mit $t \rightarrow \infty$ verschwindet (er beschreibt den Einschwingvorgang), wird das Langzeitverhalten vom zweiten Term bestimmt. Dieser beschreibt eine phasenverschobene Sinusschwingung mit der Erregerfrequenz, was physikalisch natürlich erscheint, und der Amplitude

$$A(\omega_1) = \frac{b_0}{((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4p^2\omega_1^2)^{1/2}}.$$

Um den Verlauf von A als Funktion von ω_1 zu untersuchen, ist es am einfachsten, den Nenner als Funktion von $x = \omega_1^2$ zu studieren, d.h.

$$f(x) = (\omega_0^2 - x)^2 + 4p^2 x = x^2 + (4p^2 - 2\omega_0^2)x + \omega_0^4.$$

Das Minimum der quadratischen Funktion f liegt bei $\omega_0^2 - 2p^2$. Da uns nur positive x interessieren, ist also f im Fall $\omega_0^2 - 2p^2 \leq 0$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, und f hat im Fall $\omega_0^2 - 2p^2 > 0$ im Intervall $(0, \infty)$ ein globales Minimum.

Diese Rechnung zeigt, dass $A(\omega_1)$ im Fall $p \geq \omega_0/\sqrt{2}$ für $\omega_1 \rightarrow \infty$ streng monoton gegen 0 konvergiert. Im Fall $0 < p < \omega_0/\sqrt{2}$ ergibt sich bei $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$ (der *Resonanzfrequenz*) der Maximalwert

$$A_{\max} = \frac{b_0}{2p\sqrt{\omega_0^2 - p^2}},$$

und der kann zu groß sein; es kommt zur *Resonanzkatastrophe*: Die Brücke⁴ stürzt ein, die Kreide quietscht, Oskar Matzerath lässt Scheiben zerspringen etc. Dasselbe Phänomen kann aber auch durchaus erwünscht sein (Radio, Mikrowellenherd etc.).

III.7 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Der Bestand der Populationen zweier Spezies zur Zeit t werde mit $x(t)$ bzw. $y(t)$ bezeichnet. Wenn die Spezies nicht miteinander wechselwirken und wenn man jeweils exponentielles Wachstum unterstellt, so wird die zeitliche Entwicklung von $x(t)$ und $y(t)$ durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= dy \end{aligned}$$

beschrieben. Um wechselwirkende Prozesse zu beschreiben, müssen die beiden Differentialgleichungen „gekoppelt“ sein. Ein einfaches Modell hierfür ist

$$x' = ax + by \tag{III.24}$$

$$y' = cx + dy \tag{III.25}$$

Viele Anwendungen in Biologie und Chemie findet man etwa in Batschelets Buch (siehe Literaturhinweise).

In (III.24) und (III.25) sind a, b, c, d reelle Konstanten; sind etwa $b, c > 0$, so wirken die beiden Spezies fördernd aufeinander ein, sind $b, c < 0$, so wirken sie zerstörerisch, und ist $b > 0$ und $c < 0$, so kann die y -Spezies als Beute der x -Spezies (Räuber) aufgefasst werden.

Um das System (III.24), (III.25) zu lösen, werden wir das Problem auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurückführen. Zunächst bestimmen wir durch folgende Schritte Kandidaten für die Lösung: Durch Differentiation von (III.25) erhält man

$$y'' = cx' + dy'.$$

Man setze hierin x' aus (III.24) ein:

$$y'' = c(ax + by) + dy'.$$

Hier ersetze man jetzt cx durch $y' - dy$ (gemäß (III.25)):

$$y'' = ay' - ady + bcy + dy'$$

oder

$$y'' - (a + d)y' + (ad - bc)y = 0. \tag{III.26}$$

Genauso bekommt man für x die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0. \tag{III.27}$$

⁴Es wird gelegentlich kolportiert, preußischen Soldaten sei es wegen dieser Resonanzphänomene verboten worden, im Gleichschritt über eine Brücke zu marschieren. In seiner Kolumne „Stimmt's?“ in der ZEIT vom 1. 8. 1997 verweist Christoph Drösser diese Geschichte allerdings ins Reich der Legenden.

Damit ist gezeigt: Eine Lösung von (III.24), (III.25) ist auch eine Lösung von (III.26), (III.27). Die allgemeine Lösung von (III.26) kann nach Abschnitt III.5 in der Form $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ angesetzt werden. Ist $c \neq 0$, so folgt für x aus (III.25)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{c} (y' - dy) \\ &= \frac{1}{c} (C_1 y_1' + C_2 y_2') - \frac{d}{c} (C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 \frac{y_1' - dy_1}{c} + C_2 \frac{y_2' - dy_2}{c} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

(Ist $c = 0$, aber $b \neq 0$, argumentiere analog von (III.27) ausgehend. Sind $b = 0$ und $c = 0$, so ist (III.24), (III.25) entkoppelt und trivial zu lösen.)

Umgekehrt bestätigt eine Probe, dass die hier angegebenen Lösungskandidaten x und y wirklich Lösungen von (III.24), (III.25) sind. Diese enthalten zwei freie Konstanten C_1 und C_2 . Hat man Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{III.29})$$

gegeben, gibt es genau ein Paar von Konstanten, so dass die daraus gebildete Lösung (III.29) erfüllt. Alternativ kann man die eindeutige Lösung von (III.26) unter der Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = cx(0) + dy(0) = cx_0 + dy_0 \quad (\text{III.30})$$

bestimmen und diese in (III.25) einsetzen, damit man die x -Lösung bekommt, um das AWP (III.24), (III.25), (III.29) zu lösen.

Zwei Beispiele:

(1) Löse das AWP

$$\begin{aligned} x' &= -3x - y & x(0) &= -3 \\ y' &= x - y & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Es ist also $a = -3$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $x_0 = -3$, $y_0 = 1$. Das AWP 2. Ordnung für y lautet nach (III.26), (III.30)

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4. \quad (\text{III.31})$$

Zur Lösung der Differentialgleichung muss zuerst

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

gelöst werden; diese quadratische Gleichung hat eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda_{1,2} = -2$. Nach Fall 2 aus Abschnitt III.5 hat die Lösung von (III.31) die Form

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Wegen

$$y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t}$$

gilt

$$y(0) = C_1 \quad \text{und} \quad y'(0) = -2C_1 + C_2,$$

also $C_1 = 1$ und $C_2 = -2$. Damit erhält man

$$y = e^{-2t} - 2t e^{-2t}.$$

Die x -Lösung bekommt man durch Einsetzen der y -Lösung in die Gleichung $y' = x - y$:

$$\begin{aligned} x &= y' + y \\ &= (-4e^{-2t} + 4te^{-2t}) + (e^{-2t} - 2te^{-2t}) \\ &= -3e^{-2t} + 2te^{-2t} \end{aligned}$$

(2) Bestimme die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y \\ y' &= 3x + y \end{aligned}$$

Hier lautet (III.26)

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

und (III.15)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 1 + 3i$ und $\lambda_2 = 1 - 3i$. Daher lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung (Fall 3 aus Abschnitt III.5)

$$y = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t = e^t \cdot (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

Gemäß (III.28) erhält man wegen $y' = e^t \cdot ((C_1 + 3C_2) \cos 3t + (C_2 - 3C_1) \sin 3t)$

$$x = e^t \cdot (C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t).$$

Es sei abschließend auf eine qualitative Aussage hingewiesen. Aus Abschnitt III.5 wissen wir, dass die allgemeine Lösung von (III.26) sich aus Summen von Funktionen vom Typ $\varphi(t)e^{\omega t}$, mit $\varphi(t) = \text{const.}$ oder $\varphi(t) = t$ oder $\varphi(t) = \sin t$ oder $\varphi(t) = \cos t$, zusammensetzt. Ist $\omega < 0$, gilt in jedem Fall $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)e^{\omega t} = 0$. Die hier vorkommenden ω sind die Realteile der Lösungen von

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (\text{III.32})$$

Daher gilt: Sind die Realteile der Lösungen von (III.32) < 0 , so gilt für jede Lösung von (III.24), (III.25)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

III.8 Ein Räuber-Beute-Modell

In diesem Abschnitt studieren wir (erneut) die Entwicklung zweier wechselwirkender Populationen, einer Raubpopulation R (Füchse) und einer Beutepopulation B (Hasen). Wir machen folgende Annahmen: Auf sich allein gestellt ist die Raubpopulation zum Aussterben verurteilt, während die Beutetiere unbeschränkte Ressourcen vorfinden und sich unbegrenzt vermehren würden, würden sie nicht von den Raubtieren gejagt. Ohne die Wechselwirkung würde man die Entwicklung von R und B durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} R' &= -\alpha_1 R \\ B' &= \alpha_2 B \end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ beschreiben. Nun sind viele Füchse des Hasen Tod: Die Räuber fressen die Beutetiere und vermeiden so ihr Aussterben. Dadurch nimmt gleichzeitig die Anzahl der Beutetiere ab, was das Einfügen eines Korrekturterms in die obigen Gleichungen nahelegt, der proportional zu BR , also zur Anzahl der Begegnungen zwischen beiden Spezies, ist:

$$\begin{aligned} R' &= -\alpha_1 R + \beta_1 BR \\ B' &= \alpha_2 B - \beta_2 BR \end{aligned} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0) \quad (\text{III.33})$$

Hier trägt β_1 ein positives Vorzeichen, da Begegnungen zwischen B - und R -Tieren zur Vermehrung von R führen, und β_2 trägt ein negatives Vorzeichen, da die Wechselwirkung entsprechend zur Abnahme von B führt. Die Gleichungen (III.33) bilden ein *gekoppeltes* Differentialgleichungssystem. Leider ist es unmöglich, dieses System mit einer geschlossenen Lösungsformel zu lösen; wir werden daher versuchen, eine näherungsweise Lösung zu gewinnen. Die Gleichungen (III.33) werden übrigens *Lotka-Volterra-Gleichungen* genannt.

Zunächst bestimmen wir stationäre Lösungen von (III.33), also solche, die zeitlich konstant sind. Für solche Lösungen muss ja $R' = B' = 0$ sein, also

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 = -\alpha_1 R + \beta_1 BR = R(-\alpha_1 + \beta_1 B) \\ 0 = \alpha_2 B - \beta_2 BR = B(\alpha_2 - \beta_2 R) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} R = 0 \quad \text{oder} \quad B = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ B = 0 \quad \text{oder} \quad R = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Lösung $B = R = 0$ ist hier biologisch uninteressant, und die relevante stationäre Lösung ist

$$R = R_s := \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad B = B_s := \frac{\alpha_1}{\beta_1}. \quad (\text{III.34})$$

Als nächstes untersuchen wir die Abweichungen einer beliebigen Lösung vom stationären Zustand. Wir setzen also

$$r = R - R_s, \quad b = B - B_s.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} r' &= R' \\ &= -\alpha_1 R + \beta_1 BR \\ &= -\alpha_1(r + R_s) + \beta_1(b + B_s)(r + R_s) \\ &= -\alpha_1 r - \alpha_1 R_s + \beta_1 br + \beta_1 b R_s + \underbrace{\beta_1 B_s r}_{=\alpha_1} + \underbrace{\beta_1 B_s R_s}_{=\alpha_1} \quad (\text{wegen (III.34)}) \\ &= \beta_1 R_s b + \beta_1 br \\ &= \beta_1 b(R_s + r) \end{aligned}$$

Genauso erhält man

$$b' = -\beta_2 B_s r - \beta_2 br = -\beta_2 r(B_s + b).$$

Diese beiden Gleichungen sind genauso schwer zu lösen wie die ursprünglichen Lotka-Volterra-Gleichungen. Wir nehmen nun eine Näherung für die letzten beiden Gleichungen an, indem wir unterstellen, dass r klein im Vergleich mit R_s und b klein im Vergleich mit B_s ist. Dann ist $R_s + r \approx R_s$ und $B_s + b \approx B_s$, und wir erhalten näherungsweise

$$\begin{aligned} r' &= \beta_1 R_s b \\ b' &= -\beta_2 B_s r. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Dieses System können wir tatsächlich geschlossen lösen: Wir differenzieren die erste Gleichung und setzen dann die zweite ein. Das liefert:

$$\begin{aligned} r'' &= \beta_1 R_s b' \\ &= -\beta_1 \beta_2 B_s R_s r \\ &= -\alpha_1 \alpha_2 r \quad (\text{wegen (III.34)}). \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ heißt das

$$r'' = -\omega^2 r.$$

Aus Abschnitt III.5 wissen wir, dass $r(t) = \sin \omega t$ und $r(t) = \cos \omega t$ zwei linear unabhängige Lösungen sind und sich jede Lösung durch

$$r(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

aus diesen beiden zusammensetzen lässt. Der Einfachheit halber wollen wir mit $C_2 = 0$ weiterrechnen; also

$$r(t) = C \sin \omega t$$

und wegen $r' = \beta_1 B_s b$

$$b(t) = \frac{C\omega}{\beta_1 B_s} \cos \omega t = \tilde{C} \cos \omega t.$$

Schließlich erhalten wir für R und B

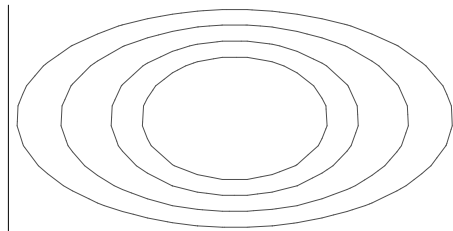
$$R(t) = R_s + C \sin \omega t$$

$$B(t) = B_s + \tilde{C} \cos \omega t.$$

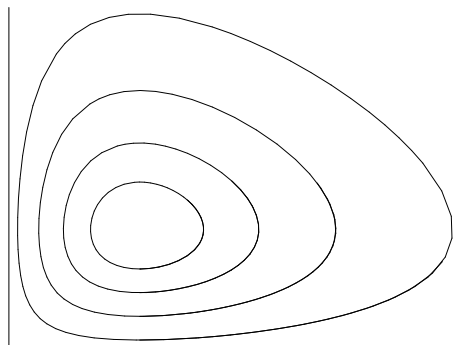
Daraus folgt, dass die Lösungen periodisch mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sind:

$$R(t+T) = R(t), \quad B(t+T) = B(t).$$

Trägt man die Punkte $(R(t), B(t))$ in ein Diagramm ein, sieht man, dass eine Ellipse entsteht (im Fall $C = \tilde{C}$ ein Kreis):



Die (biologisch plausible) Konsequenz der Periodizität wurde aber nur für das angenäherte System (III.35) bewiesen, nicht für das ursprüngliche Lotka-Volterra-System (III.33). Man kann jedoch beweisen, dass auch die Gleichungen aus (III.33) periodische Lösungen besitzen mit einer gewissen Periode T . Im R - B -Diagramm erhält man eine Kurve, die ähnlich wie eine Ellipse aussieht:



In der Skizze sieht man vier Kurven im R - B -Diagramm zu unterschiedlichen Anfangswerten $(R(0), B(0))$.

Wir wollen die durchschnittliche Größe der Räuber- bzw. Beutepopulation während einer Periode berechnen. Diese ist

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \bar{B} = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt.$$

Um \bar{R} und \bar{B} zu berechnen, verwenden wir einen Trick; wir integrieren nämlich $\alpha_2 - \beta_2 R$ und erhalten aus der zweiten Gleichung von (III.33):

$$\begin{aligned} \int_0^T \alpha_2 - \beta_2 R(t) dt &= \int_0^T \frac{B'(t)}{B(t)} dt \\ &= \int_{B(0)}^{B(T)} \frac{1}{u} du \quad (u = B(t), du = B'(t) dt, \text{ Substitutionsregel}) \\ &= \ln u \Big|_{B(0)}^{B(T)} \\ &= 0 \quad (\text{da } B(0) = B(T)) \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^T \alpha_2 dt = \int_0^T \beta_2 R(t) dt,$$

d.h.

$$\alpha_2 T = \beta_2 \int_0^T R(t) dt,$$

d.h.

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = R_s$$

und genauso

$$\bar{B} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = B_s;$$

die durchschnittlichen Populationen sind also genauso groß wie die Gleichgewichtspopulationen.

Dieses Resultat hat interessante Konsequenzen. Dazu ein historisch verbürgtes Beispiel: Im Jahre 1868 wurden einige Akazienbäume aus Australien nach Kalifornien exportiert und dort angepflanzt. Einige Insekten der Species *Icerya purchasi* (Schildläuse) wanderten mit aus und befielen prompt die kalifornischen Orangenbäume. Schildläuse saugen den Saft aus Bäumen, und so entstand der Zitrusindustrie erheblicher Schaden.

In Australien hat die Schildlaus einen natürlichen Feind, eine Marienkäferart namens *Rodolia cardinalis*. 1889 wurden 514 dieser Käfer aus Australien nach Amerika gebracht, um die Schildlausplage einzudämmen. In der Tat gelang dies innerhalb von nur 18 Monaten; die Schildlauspopulation verschwand fast vollständig, und auch die Käfer nahmen in Ermangelung von Nahrung sehr stark ab. (Dieser Geniestreich ist einem gewissen Dr. Riley zuzuschreiben.)

Kurz vor dem 2. Weltkrieg wurde das DDT erfunden, und die Orangenbauern dachten sich: „Wir haben die Schildläuse mit Hilfe der Käfer *fast* ausgerottet können; jetzt geben wir ihnen den Rest!“ Nachdem DDT in den Orangenanpflanzungen versprüht worden war, mussten die Bauern jedoch zu ihrem Missbehagen feststellen, dass sich die Schildläuse sogar wieder vermehrt hatten, statt auszusterben. Mit den Lotka-Volterra-Gleichungen kann man

erklären, warum. Der DDT-Einsatz kann durch Einfügen eines weiteren Terms (wo $\gamma_1, \gamma_2 > 0$) in diese Gleichungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}R' &= -\alpha_1 R + \beta_1 BR - \gamma_1 R = -(\alpha_1 + \gamma_1)R + \beta_1 BR \\B' &= \alpha_2 B - \beta_2 BR - \gamma_2 B = (\alpha_2 - \gamma_2)B - \beta_2 BR.\end{aligned}$$

Ist $\gamma_2 < \alpha_2$, hat das neue System dieselbe Bauart wie das alte. Nach dem Einsatz von DDT ist die durchschnittliche Raub- bzw. Beutepopulation also

$$\bar{R}_{\text{DDT}} = \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{\beta_2} < \bar{R} \quad \text{bzw.} \quad \bar{B}_{\text{DDT}} = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{\beta_1} > \bar{B},$$

wie beobachtet.

Kapitel IV

Lineare Gleichungssysteme

IV.1 Beispiele

Bei linearen Gleichungssystemen handelt es sich um Systeme von m Gleichungen mit n Unbekannten, die alle nur linear (und nicht quadratisch etc.) vorkommen. Hier einige Beispiele mit $m = n = 3$:

$$(1) \quad \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 8 \\ 4x + 5y - 2z & = & 12 \\ y - 3z & = & -5 \end{array}$$

Zur Lösung geht man so vor, dass man nach und nach versucht, die Unbekannten zu eliminieren. Ersetzt man oben die 2. Zeile durch „2. Zeile minus zweimal 1. Zeile“ (kurz: $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - 2Z_1$), erhält man das System

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 8 \\ -y + 2z & = & -4 \\ y - 3z & = & -5 \end{array}$$

Jetzt versucht man, aus der letzten Zeile das y zu eliminieren, indem man $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 + Z_2$ ausführt:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 8 \\ -y + 2z & = & -4 \\ -z & = & -9 \end{array}$$

Jetzt kann man das System von unten nach oben lösen:

$$z = 9,$$

daher

$$-y + 18 = -4,$$

d.h. $y = 22$ und

$$2x + 66 - 18 = 8,$$

d.h. $x = -20$. Dieses System hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Da man jeden der Schritte auch rückwärts machen kann (z.B. vom zweiten System zurück zum ersten gehen), erhält man tatsächlich die Lösung des Ausgangssystems. Dies ist auch bei den folgenden Beispielen zu beachten.

$$(2) \quad \begin{aligned} x + 4y - 2z &= 4 \\ 2x + 7y - z &= -2 \\ 2x + 9y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

Wir bilden $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - 2Z_1$:

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 4 \\ -y + 3z &= -10 \\ y - 3z &= -7 \end{aligned}$$

Da die letzten beiden Gleichungen einander widersprechen, hat das System keine Lösung.

$$(3) \quad \begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= -2 \\ 2x - 4y + 3z &= -4 \\ 4x - 8y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

Wir bilden $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - Z_1$ und $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - 2Z_1$:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= -2 \\ z &= -2 \\ -z &= 2 \end{aligned}$$

Es muss also $z = -2$ und

$$2x - 4y - 4 = -2,$$

d.h.

$$x - 2y = 1$$

sein. Diesmal gibt es unendlich viele Lösungen: Man kann $y \in \mathbb{R}$ beliebig wählen und $x = 2y + 1$ setzen, und $z = -2$.

Das unterschiedliche Lösungsverhalten kann geometrisch veranschaulicht werden. In unseren Gleichungssystemen kann jede Zeile als Gleichung einer Ebene im Raum verstanden werden. Dann wird in jedem Beispiel nach dem Schnitt dreier Ebenen im Raum gefragt. Ein solcher Schnitt kann

- aus einem Punkt bestehen (Beispiel 1)
- leer sein (Beispiel 2)
- aus einer Geraden bestehen (Beispiel 3)
- aus einer Ebene bestehen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

Wir haben in den Beispielen zuerst x , dann y eliminiert. Man kann in jeder beliebigen Reihenfolge vorgehen; manchmal lässt sich so die Rechenarbeit erheblich vereinfachen. Die Lösungstechnik ist nicht auf Systeme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten beschränkt; betrachten wir etwa folgendes System aus 4 Gleichungen mit 5 Unbekannten:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 &= 16 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 2x_5 &= -5 \end{aligned}$$

Wir bilden $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - 8Z_1$ und $Z_4 \rightsquigarrow Z_4 - 4Z_1$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 5x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 &= 14 \\ 15x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 17x_5 &= -7 \\ 6x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 &= -9 \end{aligned}$$

Da es rechnerisch einfacher aussieht, eliminieren wir x_3 aus der zweiten und dritten Zeile durch $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - 6Z_4$ und $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - 5Z_4$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ -31x_2 + 25x_4 + 37x_5 &= 68 \\ -15x_2 + 27x_4 + 13x_5 &= 38 \\ 6x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 &= -9 \end{aligned}$$

Nun muss noch eine Variable aus der zweiten oder dritten Zeile eliminiert werden. Um ganze Zahlen zu erhalten, bilden wir $Z_2 \rightsquigarrow 15Z_2 - 31Z_3$ (und nicht $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - \frac{31}{15}Z_3$); das liefert:

$$-462x_4 + 152x_5 = -158.$$

Wir erhalten unendlich viele Lösungen; nämlich wähle $x_5 = t \in \mathbb{R}$ beliebig,

$$x_4 = (152t + 158)/462 = \frac{76}{231}t + \frac{79}{231}$$

$$x_2 = (27x_4 + 13x_5 - 38)/15 = \frac{3370}{231}t - \frac{443}{231}$$

$$x_3 = 6x_2 - 4x_4 - 6x_5 + 9 = \frac{18530}{231}t - \frac{895}{231}$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + 1 = -\frac{13100}{231}t + \frac{319}{231}$$

Typischerweise (aber nicht immer) kann man allgemein bei einem System mit n Unbekannten und $m < n$ Zeilen $n - m$ Unbekannte frei wählen, die die übrigen festlegen; das gilt, wenn die Zeilen tatsächlich „unabhängig“ sind – nicht aber bei $(n = 3, m = 2)$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= 4, \end{aligned}$$

wo die zweite Zeile nur eine Verkleidung der ersten ist. Ebenso erhält man „typischerweise“ im Fall $m > n$ keine und im Fall $m = n$ genau eine Lösung. (Ausnahmen siehe oben!)

IV.2 Vektoren und Matrizen

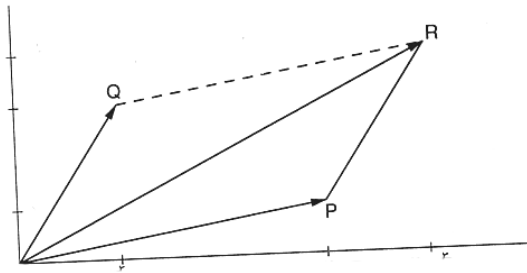
Um über Lösungen linearer Gleichungssysteme zu sprechen, bedient man sich der Sprache der *Vektoren* und *Matrizen*.

Ein Punkt im \mathbb{R}^3 wird durch seine drei Koordinaten beschrieben. Verbindet man den Ursprung mit dem Punkt, erhält man den zugehörigen Vektor; analoges gilt für den \mathbb{R}^2 .

Es ist häufig praktisch, die Koordinaten eines Vektors untereinander statt nebeneinander zu schreiben. Zwei Vektoren (mit gleich vielen Koordinaten!) können addiert werden, zum Beispiel im \mathbb{R}^3

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}.$$

Skizze im \mathbb{R}^2 :



Ebenso kann man Vektoren mit Zahlen multiplizieren:

$$\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Dann gelten die von der herkömmlichen Addition vertrauten Regeln

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= \vec{w} + \vec{v} \\ \lambda(\vec{v} + \vec{w}) &= \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} \\ (\lambda\mu)\vec{v} &= \lambda(\mu\vec{v}) \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

Achtung: Das Produkt zweier Vektoren ist nicht erklärt.

Diese Ideen lassen sich sofort auf den n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n ausdehnen (allerdings versagt ab $n = 4$ die geometrische Anschauung; jedenfalls bei den meisten Menschen). Ein Vektor in \mathbb{R}^n hat n Koordinaten, die man untereinander schreibt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\vec{v} + \vec{w}$ und $\lambda\vec{v}$ sind analog zum Fall $n = 3$ erklärt.

Betrachten wir nun noch einmal das Gleichungssystem aus Beispiel 1. Die rechten Seiten wollen wir als Koordinaten eines Vektors \vec{b} auffassen, also

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Auch die linken Seiten lassen sich so auffassen, es entsteht dann

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - 2z \\ 4x + 5y - 2z \\ y - 3z \end{pmatrix};$$

dieser Vektor lässt sich auch als

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

schreiben. Indem wir die drei (Spalten-)Vektoren in (IV.1) nebeneinander schreiben, erhalten wir das folgende Schema aus 3 Zeilen und 3 Spalten, das die Koeffizienten auf der linken Seite des Gleichungssystems wiedergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.2})$$

Ein solches Schema nennt man eine *Matrix*, genauer ist (IV.2) eine quadratische 3×3 -Matrix. Führt man dieselben Überlegungen mit dem Gleichungssystem aus Beispiel (4) durch, erhält man auf der rechten Seite den Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

und auf der linken

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

was zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 5 \\ 8 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

aus 4 Zeilen und 5 Spalten führt. Es fehlt noch ein Schritt, nämlich die Unbekannten ebenfalls in einen (Spalten-)Vektor zu schreiben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun noch einmal (IV.1). Unser Gleichungssystem aus Beispiel (1) erweist sich als zu der Vektorgleichung

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Die linke Seite wollen wir nun als Wirkung der Matrix A aus (IV.2) auf den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

interpretieren¹, wofür man kurz $A\vec{x}$ schreibt. Kürzt man wie oben die rechte Seite als \vec{b} ab, so lautet das Gleichungssystem kompakt

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Genauso lässt sich Beispiel (4) behandeln. Statt dies explizit auszuführen, kommen wir gleich zum allgemeinen Fall (den Sie sich mit Hilfe von (4) illustrieren sollten). Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann zu einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und die Unbekannten können zu einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst werden:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten führen zu einer Matrix aus m Zeilen und n Spalten (einer $m \times n$ -Matrix²):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.3})$$

Um zu erklären, wie die $m \times n$ -Matrix A auf den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ wirkt, betrachten wir die n Spalten

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{s}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

aus denen A besteht, und setzen

$$A\vec{x} = x_1\vec{s}_1 + \dots + x_n\vec{s}_n.$$

Unser Gleichungssystem lautet dann schlicht

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Statt des großen Rechtecks aus (IV.3) schreibt man kürzer

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$$

oder

$$A = (a_{ij}),$$

wenn der Laufbereich der Indizes klar ist. Explizit ist a_{ij} der Eintrag in Zeile Nummer i und Spalte Nummer j (wieder Zeile zuerst, Spalte später); zum Beispiel in (IV.2)

$$a_{13} = -2, \quad a_{31} = 0.$$

¹Unterscheide den Vektor \vec{x} von der Zahl x .

²Merke: Zeile zuerst, Spalte später.

Dann ist $A\vec{x}$ der Vektor

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Der nächste Schritt ist, die Wirkung der $m \times n$ -Matrix A als Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m anzusehen:

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Sie ist in folgendem Sinn eine *lineare Abbildung*:

$$\begin{aligned} L_A(\vec{x} + \vec{w}) &= L_A(\vec{x}) + L_A(\vec{w}) \\ L_A(\lambda\vec{x}) &= \lambda L_A(\vec{x}) \end{aligned} \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Um etwa die erste Zeile nachzurechnen, schreiben wir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \cdots & \vec{s}_n \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ die Spalten von A darstellen. Dann ist

$$\vec{x} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 + w_1 \\ \vdots \\ x_n + w_n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} L_A(\vec{x} + \vec{w}) &= A(\vec{x} + \vec{w}) \\ &= (x_1 + w_1)\vec{s}_1 + \dots + (x_n + w_n)\vec{s}_n \\ &= x_1\vec{s}_1 + \dots + x_n\vec{s}_n + w_1\vec{s}_1 + \dots + w_n\vec{s}_n \\ &= A\vec{x} + A\vec{w} \\ &= L_A(\vec{x}) + L_A(\vec{w}). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung rechnet man zur Übung selbst nach!

Nun wieder zu den Gleichungssystemen. Den Vektor, dessen sämtliche Koordinaten 0 sind, bezeichnen wir mit $\vec{0}$:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man nennt ein Gleichungssystem der Form

$$A\vec{x} = \vec{0} \tag{IV.4}$$

homogen und eins der Form

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{IV.5}$$

inhomogen. Ein homogenes Gleichungssystem hat stets eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$, eventuell aber noch weitere. Zwischen den Lösungen eines homogenen und eines inhomogenen Systems (mit derselben Matrix A) besteht folgender Zusammenhang:

1. Sind \vec{x} und \vec{w} Lösungen von (IV.4), so auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{w}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Das folgt aus der Linearität der Abbildung L_A :

$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{w}) &= L_A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{w}) \\ &= L_A(\lambda\vec{x}) + L_A(\mu\vec{w}) \\ &= \lambda L_A(\vec{x}) + \mu L_A(\vec{w}) \\ &= \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{w} \\ &= \lambda \cdot \vec{0} + \mu \cdot \vec{0} \quad \text{wegen (IV.4)} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

2. Ist \vec{x} eine Lösung von (IV.4) und \vec{y} eine Lösung von (IV.5), so ist $\vec{x} + \vec{y}$ eine Lösung von (IV.5). Das sieht man mit einer ähnlichen Rechnung:

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= L_A(\vec{x} + \vec{y}) \\ &= L_A(\vec{x}) + L_A(\vec{y}) \\ &= \vec{0} + \vec{b} \quad \text{wegen (IV.4) und (IV.5)} \\ &= \vec{b}. \end{aligned}$$

3. Sind \vec{y}_1 und \vec{y}_2 Lösungen von (IV.5), dann ist $\vec{y}_1 - \vec{y}_2$ eine Lösung von (IV.4):

$$\begin{aligned} A(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) &= L_A(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) \\ &= L_A(\vec{y}_1 + (-1) \cdot \vec{y}_2) \\ &= L_A(\vec{y}_1) + L_A((-1) \cdot \vec{y}_2) \\ &= L_A(\vec{y}_1) + (-1) \cdot L_A(\vec{y}_2) \\ &= L_A(\vec{y}_1) - L_A(\vec{y}_2) \\ &= \vec{b} - \vec{b} \quad \text{wegen (IV.5)} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Wenn (IV.4) nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ besitzt, besitzt (IV.5) also höchstens eine Lösung, und wenn $m = n$ ist, in der Tat genau eine Lösung, wie wir sehen werden. Betrachten wir dazu nochmals unser Beispiel (1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Um das Gleichungssystem umzuformen, haben wir Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert. Andere erlaubte Operationen sind eine Zeile mit einer Zahl malzunehmen oder zwei Zeilen zu vertauschen. All diese Operationen ändern die Lösungsmenge nicht. Wir können diese Operationen statt für die Gleichungen auch für die „erweiterte Matrix“

$$\left(A \mid \vec{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

durchführen (die vertikale Linie ist eine Hilfslinie). Dann erhalten wir nacheinander (vergleiche Seite 67)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{array} \right)$$

(Bei einer anderen rechten Seite \vec{b} würden sich nur die Werte rechts von der Hilfslinie ändern.) Ignoriert man die führenden Nullen, so sieht man, dass diese Matrix in *Zeilenstufenform* ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 8 \\ & -1 & 2 & -4 \\ & & -1 & -9 \end{array} \right)$$

Durch die erlaubten Operationen lässt sich jede (erweiterte) Matrix in Zeilenstufenform bringen. Dabei sind folgende Endergebnisse möglich:

1. Die letzte Stufe liegt bei der Hilfslinie, zum Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 4 & 6 \\ & & & 8 \end{array} \right)$$

Ein solches System hat keine Lösung, da die letzte Zeile für die Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 8$$

steht.

2. Die letzte Stufe liegt vor der Hilfslinie, und alle Stufen haben „die Länge 1“; vergleiche Beispiel (1). Dann kann das System eindeutig aufgelöst werden.
3. Die letzte Stufe liegt vor der Hilfslinie, und es gibt Stufen der Länge > 1 , zum Beispiel ($m = 2$, $n = 3$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Dann ist das System lösbar, aber nicht eindeutig (im Beispiel kann man $x_3 = t$ beliebig wählen und x_2 und x_1 dadurch ausdrücken).

Da der 2. Fall für $m = n$ entweder für jede rechte Seite oder für keine rechte Seite \vec{b} auftritt, ist so die Aussage auf Seite 74 über Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen gezeigt. Hier ist sie noch einmal:

Besitzt ein homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, so ist jedes inhomogene Gleichungssystem mit derselben quadratischen Matrix A eindeutig lösbar.

IV.3 Multiplikation von Matrizen

Im letzten Teil dieses Kapitels behandeln wir die Matrizenmultiplikation. Wir betrachten eine $m \times n$ -Matrix B ; diese generiert eine lineare Abbildung $L_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Des weiteren sei A eine $l \times m$ -Matrix; diese generiert eine lineare Abbildung $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$. Die beiden Abbildungen können wir hintereinander ausführen:

$$L = L_A \circ L_B, \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^l.$$

Wir suchen eine $l \times n$ -Matrix C , die diese Abbildung erzeugt. Diese müsste n Spaltenvektoren aus \mathbb{R}^l haben. Um zum Beispiel die erste Spalte zu finden, seien

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die „Einheitsvektoren“ in \mathbb{R}^n . Die erste Spalte von C ist dann $C\vec{e}_1$, die zweite $C\vec{e}_2$, etc. Nun soll die Matrix C die Abbildung L beschreiben, also

$$C\vec{x} = L(\vec{x}) = L_A(L_B(\vec{x})) = A(B\vec{x})$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sein. Setzen wir speziell $\vec{x} = \vec{e}_1$, so bekommt man

$$1. \text{ Spalte von } C = C\vec{e}_1 = A(\underbrace{B\vec{e}_1}_{1. \text{ Spalte von } B}).$$

Schreiben wir die Matrizen A und B als

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, l; j=1, \dots, m}, \quad B = (b_{jk})_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n},$$

so ist die 1. Spalte von B gleich

$$B\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix},$$

also (vergleiche Seite 73) ist

$$A(B\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{lj}b_{j1} \end{pmatrix}.$$

Dies muss die 1. Spalte von C sein. Genauso berechnet man die k -te Spalte von C als

$$A(B\vec{e}_k) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{lj}b_{jk} \end{pmatrix}.$$

Etwas platzsparender kann man schreiben: In der i -ten Zeile der k -ten Spalte von C steht die Zahl

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}. \tag{IV.6}$$

(c_{ik} wird aus der i -ten Zeile von A und der k -ten Spalte von B berechnet.)

Umgekehrt kann man durch eine etwas langwierige Rechnung bestätigen, dass wirklich $C\vec{x} = A(B\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt (und nicht bloß für $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$). Diese Matrix C wird als *Produkt* von A und B bezeichnet:

$$C = AB.$$

Achtung: Das Produkt AB ist nur erklärt, wenn gilt:

$$\text{Anzahl der Zeilen von } B = \text{Anzahl der Spalten von } A$$

Ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 6 & 12 & 18 \\ 18 & 24 & 30 \\ 8 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

(etwa: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 24$).

Im folgenden bleiben wir bei dem Fall, wo A und B beides (quadratische) $n \times n$ -Matrizen sind. Dann sind AB und BA beide definiert, aber im allgemeinen ist $AB \neq BA$ (!). Beispiel ($n = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix mit Einsen auf der „Hauptdiagonalen“ und Nullen sonst

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

aus n Zeilen und n Spalten wird mit E_n bezeichnet. Sie entspricht der identischen Abbildung $\text{Id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine $n \times n$ -Matrix A heißt *invertierbar*, wenn die Abbildung L_A umkehrbar ist. In diesem Fall existiert eine Matrix, die mit A^{-1} bezeichnet wird und zu A *inverse Matrix* genannt wird, für die

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$$

gilt. Um zu entscheiden, ob A^{-1} existiert, und A^{-1} dann zu berechnen, kann man so vorgehen. L_A ist genau dann umkehrbar, wenn es zu jedem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ genau ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$A\vec{x} = L_A(\vec{x}) = \vec{b}$$

gibt. Wie auf Seite 75 erklärt, passiert das genau dann, wenn die Matrix A auf Zeilenstufenform mit Stufen der Länge 1 gebracht werden kann. In diesem Fall berechnen wir A^{-1} wie folgt. Um etwa die erste Spalte \vec{s}_1 von A^{-1} zu bestimmen, ist (da ja $AA^{-1} = E_n$) das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{e}_1$$

zu lösen³. Das macht man mit Zeilenumformungen und der rechten Seite \vec{e}_1 . Genauso erhält man die zweite Spalte \vec{s}_2 als Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{e}_2$$

mit derselben Technik; etc.

Es ist praktisch, bei der Lösung von etwa $A\vec{x} = \vec{e}$, nicht nur bis zur Zeilenstufenform vorzudringen, sondern zur reduzierten Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_n \end{array} \right)$$

³Beachte: Hat allgemein B die Spalten $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$, so besteht AB aus den Spalten $A\vec{s}_1, \dots, A\vec{s}_n$; das folgt aus (IV.6).

Jetzt steht rechts von der Hilfslinie nämlich die Lösung, und man muss nichts mehr rechnen.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung von $A\vec{x} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad Z_2 \rightsquigarrow 2Z_2 - Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \quad Z_2 \rightsquigarrow -Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad Z_1 \rightsquigarrow Z_1 - 9Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad Z_1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Die letzte Matrix repräsentiert das zu $A\vec{x} = \vec{e}_1$ äquivalente System

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \\ x_2 &= 1, \end{aligned}$$

dessen Lösung uns ins Gesicht starrt. Die erste Spalte von A^{-1} ist also $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die zweite Spalte rechnet man analog aus: Lösung von $A\vec{x} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad Z_2 \rightsquigarrow 2Z_2 - Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad Z_2 \rightsquigarrow -Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad Z_1 \rightsquigarrow Z_1 - 9Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad Z_1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Daher ist $A\vec{x} = \vec{e}_2$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_1 &= 9 \\ x_2 &= -2, \end{aligned}$$

und die zweite Spalte von A^{-1} ist $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. Daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, haben wir in beiden Rechnungen (natürlich) dieselben Zeilenumformungen vorgenommen. Daher kann man beide Rechnungen simultan durchführen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad Z_2 \rightsquigarrow 2Z_2 - Z_1$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) & \quad Z_2 \rightsquigarrow -Z_2 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \quad Z_1 \rightsquigarrow Z_1 - 9Z_2 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -8 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \quad Z_1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}Z_1 \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen lässt sich so verallgemeinern: Um A^{-1} für eine $n \times n$ -Matrix zu bestimmen, schreibe man die $n \times 2n$ -Matrix

$$(A|E_n)$$

hin. Versuche, durch Zeilenoperationen A in E_n zu verwandeln. Wende dieselben Zeilenoperationen auf E_n (rechts von der Hilfslinie) an, das Ergebnis ist dann

$$(E_n|A^{-1}).$$

Wenn man A^{-1} besitzt, kann man alle Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ auf einen Schlag lösen; die Lösung ist nämlich $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, denn

$$A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = E_n\vec{b} = \vec{b},$$

wobei die erste Gleichung aus der Definition des Matrixprodukts folgt.

Ob eine Matrix eine Inverse besitzt oder nicht, kann man im Prinzip an einer Zahl, der *Determinante* $\det A$ der Matrix A , ablesen: Ist $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar; ist $\det A = 0$, so ist A nicht invertierbar. Leider ist es etwas aufwändig, die Determinante zu beschreiben und zu berechnen; nur im Fall einer 2×2 -Matrix ist das ganz einfach: Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det A = ad - bc.$$

Kapitel V

Funktionen von mehreren Veränderlichen

V.1 Beispiele

In den Naturwissenschaften und der Mathematik tauchen nicht nur Funktionen einer Veränderlichen, sondern auch Funktionen mehrerer Veränderlicher auf. Zum Beispiel:

- (1) Die Stromstärke I hängt von der angelegten Spannung U und dem Widerstand R des Leiters ab:

$$I = f(U, R) = \frac{U}{R}.$$

- (2) Der Abstand eines Punktes im \mathbb{R}^3 mit den Koordinaten (x, y, z) vom Ursprung ist

$$d = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

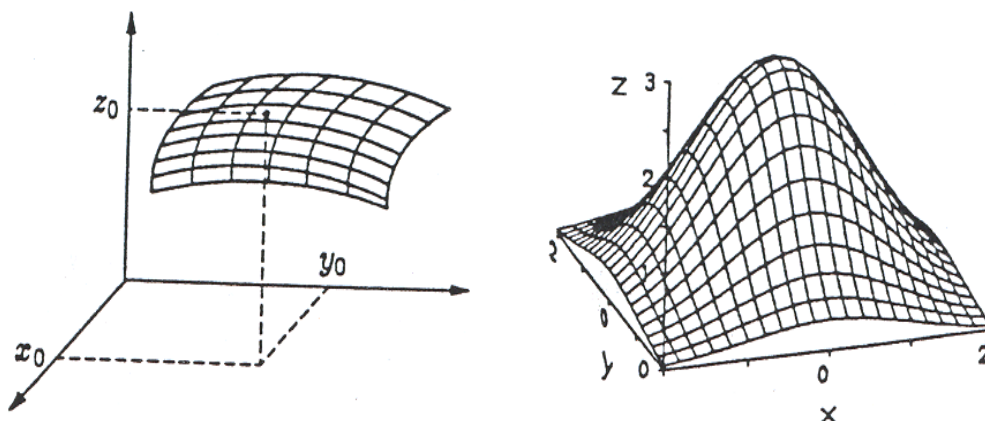
- (3) Der Mittelwert m von 10 Zahlen x_1, \dots, x_{10} ist

$$m = f(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{10}(x_1 + \dots + x_{10}).$$

- (4) Der Reibungskoeffizient bei der Bewegung einer Kugel mit Radius R und Dichte δ in einer Flüssigkeit der Viskosität η ist

$$f(R, \delta, \eta) = \frac{9\eta}{2R^2\delta}.$$

Wie bei Funktionen einer Variablen kommt auch im Mehrdimensionalen jede Funktion mit einem Definitionsbereich daher, zum Beispiel im ersten Beispiel $\{(U, R) \in \mathbb{R}^2: R \neq 0\}$ als mathematisch maximaler Definitionsbereich oder $\{(U, R) \in \mathbb{R}^2: R > 0\}$ als physikalisch maximaler. Schwieriger ist die graphische Darstellung: Sei n die Anzahl der Veränderlichen. Für $n = 1$ ist der Graph einer Funktion eine Kurve in der Ebene und für $n = 2$ eine Fläche im Raum, zum Beispiel:



Diese Graphen sind im allgemeinen viel schwieriger zu visualisieren als im Eindimensionalen. Ab $n = 3$ geht das gar nicht mehr; man bräuchte nämlich mindestens 4 Dimensionen, um sich dann einen Graphen vorzustellen.

Eine Alternative im Fall $n = 2$ besteht darin, sich die *Höhenlinien* einer Funktion $z = f(x, y)$ anzusehen. Das heißt, man untersucht alle (x, y) , für die f einen konstanten Wert c annimmt (das Verfahren ist von Wetter- und Landkarten bekannt). Zwei Beispiele:

- (1) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Für $c > 0$ ist die Höhenlinie $z = c$ ein Kreis mit Radius \sqrt{c} .
- (2) $z = f(x, y) = xy$. Für $c \in \mathbb{R}$ ist $xy = c$ zu untersuchen; für $c \neq 0$ liefert das wegen $y = \frac{c}{x}$ Hyperbeln und für $c = 0$ die Vereinigung der beiden Achsen.

Viele Begriffe lassen sich aus dem Eindimensionalen übertragen. So hieß dort eine Funktion stetig, wenn stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

gilt; analog nennen wir eine Funktion von zwei (bzw. drei etc.) Veränderlichen stetig, wenn stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x, y)$$

gilt. Als Faustregel gilt, dass alle „natürlich“ vorkommenden Funktionen stetig sind, obwohl der exakte Nachweis kompliziert sein kann. Beispiel: Auf $\{(x, y): x > 0\}$ ist $f(x, y) = x^y$ stetig.

V.2 Partielle Ableitungen

Der Begriff der Ableitung ist nicht so einfach zu übertragen, denn übersetzt man den Differenzenquotienten wörtlich, müsste man durch ein Element $h \in \mathbb{R}^n$ dividieren, was nicht geht. Im folgenden betrachten wir den Fall $n = 2$ (oder manchmal $n = 3$), aber im allgemeinen Fall geht alles analog.

Man behilft sich nun, indem man bei einer Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Variable konstant hält und die andere laufen lässt. Das liefert zwei Funktionen von einer Variablen, die man versuchen kann zu differenzieren. Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^4$. Hält man y fest, bekommt man $x \mapsto x^2 + y^4$ mit der Ableitung $x \mapsto 2x$. Diese wird die *partielle Ableitung* von f nach x genannt und mit f_x oder $\frac{\partial f}{\partial x}$ bezeichnet:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

und speziell etwa

$$f_x(3, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 6.$$

Hält man stattdessen x fest, bekommt man $y \mapsto x^2 + y^4$ mit der Ableitung $y \mapsto 4y^3$. Dies ist die partielle Ableitung von f nach y :

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3$$

und speziell etwa

$$f_y(3, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 4.$$

Zwei weitere Beispiele:

$$(1) f(x, y) = \frac{x}{y}; f_x(x, y) = \frac{1}{y}; f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

$$(2) f(x, y) = xy; f_x(x, y) = y; f_y(x, y) = x.$$

Explizit lautet die Definition der partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (\text{V.1})$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (\text{V.2})$$

Bei drei Veränderlichen geht es genauso: Man lässt jeweils eine Variable laufen und hält die andere fest; zum Beispiel:

$$f(R, \delta, \eta) = \frac{9\eta}{2R^2\delta}$$

Dann sind die drei partiellen Ableitungen:

$$f_R(R, \delta, \eta) = -\frac{9\eta}{R^3\delta}, \quad f_\delta(R, \delta, \eta) = -\frac{9\eta}{2R^2\delta^2}, \quad f_\eta(R, \delta, \eta) = \frac{9}{2R^2\delta}.$$

Ist f eine Funktion von n Veränderlichen, erhält man n partielle Ableitungen f_{x_1}, \dots, f_{x_n} .

Im Unterschied zum Fall $n = 1$ folgt für $n \geq 2$ aus der partiellen Differenzierbarkeit nicht automatisch die Stetigkeit der Funktion; ein (etwas künstliches) Gegenbeispiel ist

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

f ist unstetig, da $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \not\rightarrow f(0, 0) = 0$. Man kann nachrechnen, dass f_x und f_y überall existieren¹. Man kann jedoch folgenden Satz beweisen: Existieren alle partiellen Ableitungen und sind diese stetig, so ist auch die Funktion stetig.

In dieser Vorlesung soll deshalb eine Funktion von mehreren Veränderlichen *differenzierbar* heißen, wenn alle partiellen Ableitungen existieren *und* stetig sind (das wird bei allen „natürlichen“ Funktionen automatisch der Fall sein). Nach dem zitierten Satz ist die Implikation „differenzierbar \Rightarrow stetig“ also wieder richtig.

¹Bei $(0, 0)$ benutze die Grenzwertdefinitionen (V.1) und (V.2).

Höhere partielle Ableitungen

Hat man von einer Funktion die partiellen Ableitungen f_x, f_y gebildet, kann man versuchen, diese erneut partiell zu differenzieren. Das liefert die vier zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x}{y}, & f_x(x, y) &= \frac{1}{y}, & f_y(x, y) &= -\frac{x}{y^2}, \\ f_{xx}(x, y) &= 0, & f_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{y^2}, & f_{yx}(x, y) &= -\frac{1}{y^2}, & f_{yy}(x, y) &= \frac{2x}{y^3} \end{aligned}$$

Es ist übrigens kein Zufall, dass f_{xy} und f_{yx} übereinstimmen; das stimmt praktisch immer (genauer: wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind).

Für $n = 3$ gibt es 9 zweite partielle Ableitungen:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}.$$

Der Satz über die Übereinstimmung der „gemischten“ zweiten partiellen Ableitungen gilt entsprechend.

V.3 Skalarprodukt und Norm

Im \mathbb{R}^3 ist das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^3 x_j y_j$$

erklärt². Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl. Zwei Vektoren sind orthogonal (= stehen senkrecht aufeinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Die Länge des Vektors \vec{x} , $\|\vec{x}\|$ (lies: Norm von \vec{x}), ist ja

$$\|\vec{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

also

$$\|\vec{x}\| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Bilden \vec{x} und \vec{y} den Winkel α , so ist

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \alpha. \tag{V.3}$$

Deshalb ist stets

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

²Manchmal wird das auch inneres Produkt genannt und mit $\vec{x} \cdot \vec{y}$ bezeichnet.

Es gilt noch

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \\ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\lambda \vec{x}\| &= |\lambda| \|\vec{x}\|\end{aligned}$$

Was oben zu Skalarprodukt und Norm im \mathbb{R}^3 gesagt wurde, gilt genauso im \mathbb{R}^n . Diesmal ist

$$\text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

V.4 Der Gradient

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $(x_0, y_0) \in D$. Der Vektor³

$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

heißt *Gradient* von f an der Stelle (x_0, y_0) ; Bezeichnung:

$$(\text{grad } f)(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad (\vec{\nabla} f)(x_0, y_0) \quad (\text{lies: Nabla}).$$

Beispiele sind:

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad (\text{grad } f)(x, y) = (2x, 2y);$$

zum Beispiel $(\text{grad } f)(2, 1) = (4, 2)$.

(2) $f(x, y) = \frac{e^x}{y} + y$. Dann ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y} e^x, \quad f_y(x, y) = -\frac{e^x}{y^2} + 1, \quad (\text{grad } f)(x, y) = \left(\frac{1}{y} e^x, -\frac{e^x}{y^2} + 1 \right);$$

zum Beispiel $(\text{grad } f)(0, 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$.

(3) $f(x, y) = \cos(xy^2)$. Dann ist

$$f_x(x, y) = -\sin(xy^2)y^2, \quad f_y(x, y) = -\sin(xy^2)2xy,$$

$$(\text{grad } f)(x, y) = (-\sin(xy^2)y^2, -\sin(xy^2)2xy) = -\sin(xy^2)y \cdot (y, 2x);$$

zum Beispiel $(\text{grad } f)(0, 0) = (0, 0)$.

³Um Platz zu sparen, schreibe ich Vektoren jetzt als Zeilen.

Im Höherdimensionalen spielt der Gradient dieselbe Rolle wie die Ableitung im Eindimensionalen. Beachte:

$n = 1$: $f'(x)$ ist eine Zahl, $f' : x \mapsto f'(x)$ ist eine Funktion.

$n = 2$: $(\text{grad } f)(x, y)$ ist ein Vektor, $(x, y) \mapsto (\text{grad } f)(x, y)$ ist eine vektorwertige Funktion, ein sogenanntes „Vektorfeld“. Etwas ungenau werden wir beides Gradient nennen.

Im Eindimensionalen approximiert die Tangente an einer Stelle z_0 die gegebene Funktion gut „in der Nähe“ von z_0 . Für die Gleichung der Tangente hat man

$$g(x) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (x - z_0).$$

Für $n = 2$ tritt an die Stelle der Tangente die Tangentialebene, die durch die partiellen Ableitungen bei $z = (z_1, z_2)$ bestimmt wird; ihre Gleichung ist

$$g(x_1, x_2) = f(z_1, z_2) + f_{x_1}(z_1, z_2) \cdot (x_1 - z_1) + f_{x_2}(z_1, z_2) \cdot (x_2 - z_2).$$

Dies kann man kürzer schreiben, wenn man (x_1, x_2) bzw. (z_1, z_2) als Vektoren \vec{x} bzw. \vec{z} auffasst:

$$g(\vec{x}) = f(\vec{z}) + \langle (\text{grad } f)(\vec{z}), \vec{x} - \vec{z} \rangle.$$

Im obigen Beispiel (1) ist die Tangentialebene im Punkt $(2, 1)$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= f(2, 1) + \langle (\text{grad } f)(2, 1), \vec{x} - (2, 1) \rangle \\ &= 5 + \langle (4, 2), \vec{x} - (2, 1) \rangle \\ &= 5 + 4x_1 + 2x_2 - 8 - 2 \\ &= -5 + 4x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Auch der Mittelwertsatz kann übertragen werden. Er lautet jetzt:

Satz V.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in D$, und die Verbindungsstrecke S von \vec{x} nach \vec{y} liege ebenfalls in D . Dann existiert eine Stelle \vec{z} auf S mit

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \langle (\text{grad } f)(\vec{z}), \vec{y} - \vec{x} \rangle.$$

Der Satz kann mittels der Hilfsfunktion $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))$ auf den eindimensionalen Mittelwertsatz zurückgeführt werden.

Richtungsableitungen

Bei der Definition der partiellen Ableitungen hat man die Funktion f gewissermaßen nur in x - bzw. y -Richtung angeschaut. Setzt man $\vec{e}_1 = (1, 0)$ und $\vec{e}_2 = (0, 1)$, so kann man die Formeln (V.1) und (V.2) folgendermaßen in vektorieller Schreibweise wiedergeben:

$$\begin{aligned} f_x(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h} \\ f_y(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_2) - f(\vec{x})}{h} \end{aligned}$$

Sei nun $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor der Länge 1 (also $\|\vec{e}\| = 1$). Dann ist die Richtungsableitung von f bei \vec{x} in Richtung \vec{e} erklärt als

$$f_{\vec{e}}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h}.$$

Zwischen dem Gradienten und der Richtungsableitung besteht folgender Zusammenhang:

Satz V.2 Wenn f differenzierbar ist, gilt

$$f_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle (\text{grad } f)(\vec{x}), \vec{e} \rangle.$$

Das kann man mit dem Mittelwertsatz begründen: In einem (kleinen) Kreis um \vec{x} können wir für ein gewisses \vec{z} schreiben:

$$f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x}) = \langle (\text{grad } f)(\vec{z}), h\vec{e} \rangle$$

und daher

$$\frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} = \langle (\text{grad } f)(\vec{z}), \vec{e} \rangle.$$

Beachte, dass \vec{z} von h abhängt! Lässt man $h \rightarrow 0$ streben, strebt $\vec{z} \rightarrow \vec{x}$, und daher⁴ strebt die rechte Seite gegen $\langle (\text{grad } f)(\vec{x}), \vec{e} \rangle$. Das war zu zeigen.

Dieser Satz hat folgende Konsequenz:

Satz V.3 Ist $\vec{u} = (\text{grad } f)(\vec{x}) \neq \vec{0}$, so ist der Anstieg von f bei \vec{x} am stärksten in Richtung \vec{u} .

Ist nämlich \vec{e} mit $\|\vec{e}\| = 1$ eine beliebige Richtung, so ist der Anstieg von f durch die Richtungsableitung in Richtung \vec{e} gegeben, und zwar ist diese nach Satz V.2

$$f_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{e} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}\| \cdot \cos \alpha,$$

wo α der von \vec{u} und \vec{e} gebildete Winkel ist (siehe (V.3)). Hier sind $\|\vec{u}\| \neq 0$ gegeben und $\|\vec{e}\| = 1$; das einzige, das man variieren kann, ist der Winkel α . Nun ist aber $\cos \alpha$ maximal, wenn $\alpha = 0$ ist, und das heißt, dass \vec{e} in dieselbe Richtung wie \vec{u} zeigt: $\vec{e} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Das war die Behauptung.

Im obigen Beispiel (2) wächst f im Punkt $(0, 2)$ am stärksten in Richtung $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Wie jeder Bergwanderer weiß, verläuft der stärkste Anstieg senkrecht zu den Höhenlinien. Daher *steht der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien*.

Alles, was in diesem Abschnitt gesagt wurde, funktioniert entsprechend für $n \geq 3$ Variable. Hier nur ein Beispiel für $n = 3$: Für $f(x, y, z) = x \cos y \sin z$ lautet der Gradient

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = (\cos y \sin z, -x \sin y \sin z, x \cos y \cos z).$$

V.5 Anwendungen

Fehlerrechnung

Nehmen wir an, wir haben eine Größe y , die von einer anderen Größe x abhängt:

$$y = f(x).$$

Wenn $x = x_0$ mit einem Fehler Δx bestimmt wird, was kann man dann über den maximalen Fehler der y -Werte sagen? Ist Δx klein, kann man diese Frage in guter Annäherung beantworten, wenn man f durch die Tangente an der Stelle x_0 ersetzt: Sind die wahren Werte x_0 und $y_0 = f(x_0)$, hat man aber statt x_0 einen Wert x mit $|x - x_0| \leq \Delta x$, so ist nach der maximalen Abweichung von $f(x)$ von y_0 gefragt. Statt dies exakt zu berechnen, ersetze man f durch die Tangente an x_0 , deren Gleichung durch

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

gegeben ist. Näherungsweise ist dann für kleine Δx

$$f(x) \approx g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

⁴Nach unserer Definition von Differenzierbarkeit (Seite 83) sind alle partiellen Ableitungen stetig.

also

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\approx |g(x) - f(x_0)| \\ &= |f'(x_0)| \cdot |x - x_0| \\ &\leq |f'(x_0)| \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Der Fehler Δy ist also durch $|f'(x_0)| \cdot \Delta x$ näherungsweise abzuschätzen.

Im Fall von $n \geq 2$ Variablen geht man analog vor: Nehmen wir an, die Größe z hänge von x und y ab:

$$z = f(x, y).$$

Die Messung des x -Wertes sei mit einem Fehler Δx und die Messung des y -Wertes mit einem Fehler Δy behaftet:

$$|x - x_0| \leq \Delta x, \quad |y - y_0| \leq \Delta y.$$

Was kann man über den Fehler des z -Wertes

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$$

aussagen? Wir nehmen wieder an, dass Δx und Δy klein sind, so dass wir f durch die Tangentialebene ersetzen können, ohne einen großen Fehler zu machen:

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\approx |g(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ &= |f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)| \\ &\leq |f_x(x_0, y_0)(x - x_0)| + |f_y(x_0, y_0)(y - y_0)| \\ &= |f_x(x_0, y_0)| \cdot |x - x_0| + |f_y(x_0, y_0)| \cdot |y - y_0| \\ &\leq |f_x(x_0, y_0)| \cdot \Delta x + |f_y(x_0, y_0)| \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

Gleichzeitig sieht man, ob der Fehler in der x - oder in der y -Komponente einen größeren Einfluss auf den Fehler Δz hat.

Ein Beispiel: Die Erdbeschleunigung g kann aus der Schwingungsdauer T und der Pendellänge L eines Fadenpendels gemäß

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

berechnet werden. Die Messwerte T und L sind zu

$$T = 2.6 \pm 0.05 \text{ sec}, \quad L = 1.711 \pm 0.001 \text{ m}$$

bestimmt worden. Es ergibt sich für g

$$g = 4\pi^2 \frac{1.711 \text{ m}}{(2.6 \text{ sec})^2} = 9.99 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Um die Fehlergrenze zu bestimmen, benötigen wir die partiellen Ableitungen von

$$f(T, L) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2},$$

das sind

$$f_T(T, L) = -8\pi^2 \frac{L}{T^3}, \quad f_L(T, L) = 4\pi^2 \frac{1}{T^2}$$

mit den Werten

$$|f_T(2.6, 1.711)| = 7.686 \dots, \quad |f_L(2.6, 1.711)| = 5.840 \dots$$

Also ist der Fehler in der g -Bestimmung annähernd höchstens

$$\begin{aligned} \Delta g &\leq (7.686 \cdot 0.05 + 5.840 \cdot 0.001) \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \\ &= (0.3843 + 0.00584) \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \\ &= 0.39 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \end{aligned}$$

Man sieht, dass der Einfluss des T -Fehlers mehr als 65-mal so groß wie der Einfluss des L -Fehlers ist.

Extremwerte

Gegeben sei eine Funktion f auf einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir suchen nach Kriterien für Extremwerte im Inneren von D ; dabei ist $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ ein innerer Punkt von D , wenn es einen Kreis um \vec{x}_0 gibt, der in D liegt:

$$K_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x}: \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset D$$

Analog zum Eindimensionalen sagt man, dass bei \vec{x}_0 ein lokales Minimum vorliegt, wenn es einen Kreis $K_r(\vec{x}_0)$ gibt, so dass $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ für alle $\vec{x} \in K_r(\vec{x}_0)$ gilt; es ist strikt, wenn sogar $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ für alle $\vec{x} \in K_r(\vec{x}_0)$, $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, gilt. Entsprechend sind (strikte) lokale Maxima erklärt. Zuerst ein notwendiges Kriterium, das vollkommen analog zum eindimensionalen Fall ist.

Satz V.4 *Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, ist \vec{x}_0 ein innerer Punkt von D und liegt bei \vec{x}_0 ein lokales Extremum vor, so gilt notwendig*

$$(\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Funktion

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

von einer Variablen. Wenn $K_r(\vec{x}_0) \subset D$ ist, ist diese Funktion mindestens auf dem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ erklärt, und nach Voraussetzung besitzt sie bei x_0 ein lokales Extremum. Daher verschwindet ihre Ableitung bei x_0 , und die ist nichts anderes als $f_x(x_0, y_0)$. Indem man

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

untersucht, erhält man genauso $f_y(x_0, y_0) = 0$; daher gilt

$$(\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Wie im Eindimensionalen ist das Kriterium nicht hinreichend; Beispiel: $f(x, y) = xy$, $\vec{x}_0 = \vec{0}$. Was noch fehlt, ist das Analogon zu

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ Minimalstelle,
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ Maximalstelle.

Das Analogon zur 2. Ableitung bei einer Funktion von zwei Veränderlichen ist die *Hessesche Matrix*

$$(Hf)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\vec{x}_0) & f_{xy}(\vec{x}_0) \\ f_{yx}(\vec{x}_0) & f_{yy}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Beispiel (vergleiche Seite 84): Für $f(x, y) = \frac{x}{y}$ und $\vec{x}_0 = (2, 1)$ ist

$$(Hf)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man folgenden Satz zeigen:

Satz V.5 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei \vec{x}_0 ein innerer Punkt von D mit $(\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Sei $A = (Hf)(\vec{x}_0)$ die Hessesche Matrix.

- (a) Ist für $\vec{v} \neq \vec{0}$ stets $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$, so liegt bei \vec{x}_0 ein striktes lokales Minimum vor.
- (b) Ist für $\vec{v} \neq \vec{0}$ stets $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$, so liegt bei \vec{x}_0 ein striktes lokales Maximum vor.
- (c) Gibt es ein \vec{v} mit $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ und ein \vec{w} mit $\langle A\vec{w}, \vec{w} \rangle < 0$, so liegt bei \vec{x}_0 kein lokales Extremum vor.

Die Teile (a) und (b) verallgemeinern die entsprechenden Aussagen aus dem eindimensionalen Fall; für den Teil (c) gibt es aber keine Entsprechung dort.

Satz V.5 gilt genauso für $n \geq 3$ Variable, aber nur im Fall $n = 2$ kann man die in (a)–(c) genannten Bedingungen auch leicht überprüfen. Das geht so: Da die gemischten Ableitungen f_{xy} und f_{yx} übereinstimmen (vergleiche Seite 84), hat die Hessesche Matrix die Gestalt

$$(Hf)(\vec{x}_0) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Setze $\Delta = ad - b^2$ (die Determinante von A ; vgl. S. 79). Dann gilt:

- (a) $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow a > 0, \Delta > 0$
- (b) $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow a < 0, \Delta > 0$
- (c) Es gibt ein \vec{v} mit $\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ und ein \vec{w} mit $\langle A\vec{w}, \vec{w} \rangle < 0$ $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Der Fall (c) entspricht einem „Sattelpunkt“; Beispiel: $f(x, y) = xy$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$. Dann:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x &\Rightarrow (\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0} \\ f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1, \quad f_{yy}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Also

$$(Hf)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -1 < 0.$$

Beispiel: Finde die lokalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Wir suchen als erstes die Stellen mit $(\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \vec{0}$ (diese werden auch die *kritischen Punkte* von f genannt). Dazu sind die Gleichungen

$$3x^2 - 3y = 0$$

$$3y^2 - 3x = 0$$

d.h.

$$y = x^2$$

$$x = y^2$$

zu lösen. Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, folgt

$$y = y^4$$

beziehungsweise

$$0 = y^4 - y = y(y^3 - 1)$$

mit den Lösungen $y = 0$, $y = 1$, was auf die zugehörigen x -Werte $x = 0$, $x = 1$ führt. Die kritischen Punkte sind also $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Die Hessesche Matrix ist

$$(Hf)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},$$

daher

$$(Hf)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a = 0$, $\Delta = -9 < 0$ und

$$(Hf)(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

mit $a = 6$, $\Delta = 27 > 0$. Nach (c) ist bei $(0, 0)$ ein Sattelpunkt, und nach (a) ist bei $(1, 1)$ ein Minimum.

V.6 Die Diffusionsgleichung

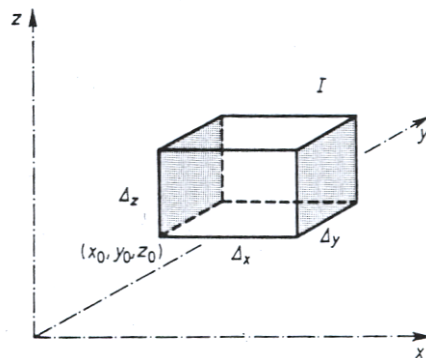
In diesem Abschnitt betrachten wir eine partielle Differentialgleichung (also eine Differentialgleichung, in der partielle Ableitungen vorkommen), die bei vielen Strömungsproblemen auftaucht.

Die Strömung einer Flüssigkeit kann durch ein *Vektorfeld*, das ist eine Abbildung $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, beschrieben werden:

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Genauer gesagt ist das eine stationäre, also zeitunabhängige Strömung; im zeitabhängigen Fall wäre $\vec{F}(x, y, z, t)$ zu schreiben.

Wir betrachten einen „kleinen“ Quader Q der Ausmaße $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ in der Strömung:



Durch die linke Wand strömt dann ungefähr

$$F_1(\vec{x}_0)\Delta y\Delta z$$

und durch die rechte

$$F_1(\vec{x}_0 + \Delta x \cdot \vec{e}_1)\Delta y\Delta z.$$

Das ergibt eine Massenbilanz von

$$(F_1(\vec{x}_0 + \Delta x \cdot \vec{e}_1) - F_1(\vec{x}_0)) \cdot \Delta y\Delta z \approx \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}_0)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Analog erhält man für die vordere und hintere beziehungsweise untere und obere Wand

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}_0)\Delta y\Delta x\Delta z$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{x}_0)\Delta z\Delta x\Delta y.$$

Die „Gesamtergiebigkeit“ des Quaders ist daher annähernd

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}_0) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{x}_0)\right) \cdot \Delta x\Delta y\Delta z.$$

Teilt man diesen Ausdruck durch das Volumen des Quaders und lässt man Δx , Δy , Δz gegen 0 streben, erhält man die Quelledichte des Flusses \vec{F} im Punkt \vec{x}_0 ; diesen Ausdruck nennt man die *Divergenz* von \vec{F} :

$$(\operatorname{div} \vec{F})(\vec{x}_0) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}_0) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{x}_0).$$

Beispiel: Für $\vec{F}(x, y, z) = (xy, e^y z, x + y + z)$ ist

$$(\operatorname{div} \vec{F})(\vec{x}_0) = y_0 + e^{y_0} z_0 + 1.$$

Beachte, dass $(\operatorname{div} \vec{F})(\vec{x})$ eine Zahl und $\operatorname{div} \vec{F}$ eine reellwertige Funktion ist.

Betrachten wir nun eine (zeitabhängige) Diffusion. Diese wird hervorgerufen durch ein Konzentrationsgefälle der diffundierenden Substanz. Diese Konzentration an der Stelle \vec{x} zur Zeit t bezeichnen wir mit $\varphi(\vec{x}, t)$. Der zugehörige Fluss verläuft dann entgegen der Richtung von $\operatorname{grad} \varphi$ (der Gradient bezieht sich jetzt nur auf die Ortskoordinaten), da der Fluss „bergab“, also von der höheren zur niedrigeren Konzentration, geht. Mit einer Konstanten $D > 0$, der Diffusionskonstanten (üblicherweise in cm^2/sec gemessen), gilt also (Ficksches Gesetz)

$$\vec{F} = -D \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Wie oben ermittelt, ist die Ergiebigkeit des Flusses in einem kleinen Probevolumen ΔV in der Zeitspanne Δt

$$\Delta m = -\operatorname{div} \vec{F} \Delta V \Delta t = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} \varphi) \Delta V \Delta t.$$

(Das Minuszeichen steht, da die Divergenz die Ergiebigkeit des *ausfließenden* Flusses misst.) Andererseits ist wegen der Massenerhaltung

$$\Delta m = \Delta \varphi \Delta V.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} \varphi)$$

und nach Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} \varphi).$$

Diese Gleichung, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*, gilt auch, wenn D von \vec{x} abhängt. Ist das nicht der Fall, kann die Gleichung vereinfacht werden, denn man kann D vor die Divergenz ziehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi).$$

Nun ist

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

also

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

Dafür schreibt man auch $\Delta \varphi$ (lies: Laplace φ , nicht mit Delta φ verwechseln!); Δ heißt der Laplaceoperator:

$$\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

(Analog ist in zwei Dimensionen $\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$.) Unsere Kontinuitätsgleichung geht dann in die *Diffusions-* oder *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \cdot \Delta \varphi$$

über. Ist die Strömung stationär, also $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, erhält man die *Laplacegleichung*

$$\Delta \varphi = 0.$$

Beides sind Beispiele *partieller Differentialgleichungen*. Solche Gleichungen sind viel schwieriger zu behandeln als gewöhnliche Differentialgleichungen; daher wollen wir nur einen Fall behandeln, den Fall einer eindimensionalen Strömung. Dann ist φ eine Funktion einer Ortskoordinate und der Zeit, $\varphi(x, t)$, und die Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (\text{V.4})$$

Eine sehr spezielle Lösung dieser Gleichung lautet

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-x^2/(4Dt)};$$

sie heißt die Grundlösung. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot t^{-3/2} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} + \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot t^{-1/2} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot \frac{x^2}{4Dt^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot t^{-3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4Dt} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot t^{-1/2} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot \frac{-x}{2Dt} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot t^{-1/2} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot \frac{x^2}{4D^2 t^2} + \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot t^{-1/2} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot \frac{-1}{2Dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \cdot e^{-x^2/(4Dt)} \cdot t^{-3/2} \cdot \left(\frac{x^2}{4D^2 t} - \frac{1}{2D} \right), \end{aligned}$$

und deshalb gilt (V.4). Die Grundlösung hat folgende Eigenschaften:

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx = 1$$

Dazu muss man wissen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ist; dann folgt mit der Substitution $z = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$, $dz = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} dx$

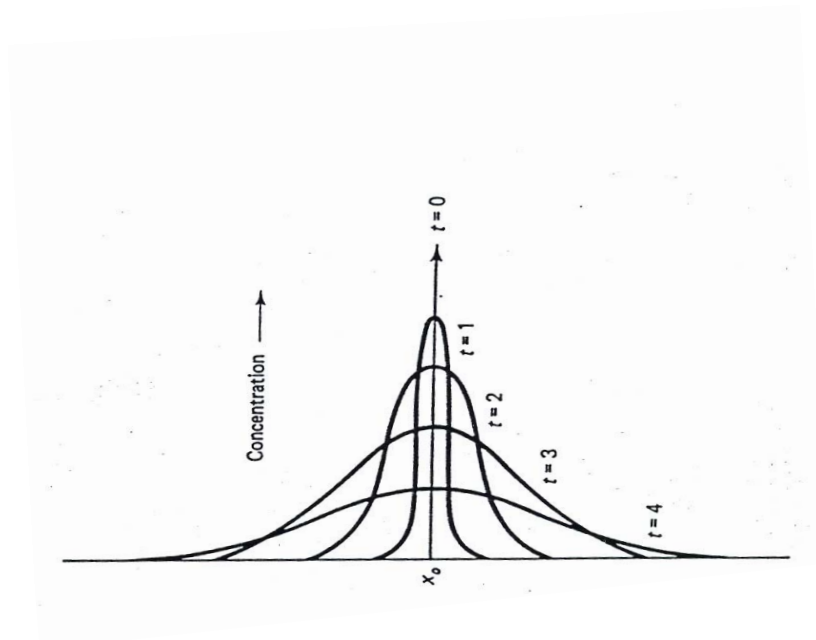
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4Dt)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/\sqrt{4Dt})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \sqrt{4Dt} dz = \sqrt{4\pi Dt}.$$

2. Für $x \neq 0$ ist $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = 0$, denn

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{4\pi Dt}}{e^{x^2/(4Dt)}} = 0,$$

denn der Zähler geht mit einer Potenz von t gegen ∞ und der Nenner exponentiell.

3. Für $x = 0$ ist $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) = \infty$ (klar).



$x \mapsto g(x, t)$ für verschiedene t -Werte

Daher stellen die Physiker sich $g(x, 0)$ als „Delta-Funktion“ vor; das ist eine hypothetische Funktion δ mit den Eigenschaften

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

So eine Funktion gibt es nicht, aber man kann sehr gut damit rechnen! (In der Distributionentheorie haben die Mathematiker begründet, warum das klappt.) Mit ihrer Hilfe wollen wir das folgende Anfangswertproblem lösen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{für } t > 0$$

$$\varphi(x, 0) = h(x),$$

wobei h eine gegebene Funktion ist; sie entspricht dem Anfangszustand. Die Lösung erhält man durch Überlagerung von Grundlösungen, nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y, t) \cdot h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) \cdot h(x-y) dy.\end{aligned}$$

(Die untere Gleichung erhält man, wenn man $x-y = z$ substituiert und dann wieder zum Variablennamen y zurückkehrt.) Dass das eine Lösung ist, bestätigt man formal so:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y, t) \cdot h(y) dy \\ &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} g(x-y, t) \cdot h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x-y, t) \cdot h(y) dy \\ &\stackrel{!}{=} D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y, t) \cdot h(y) dy \\ &= D \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t)\end{aligned}$$

(Dass man bei $\stackrel{!}{=}$ jeweils Ableitung und Integral vertauschen darf, ist eine heikle Sache, die hier nicht problematisiert wird.)

Ferner ist

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y, 0) \cdot h(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot h(x-y) dy \\ &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot h(x) dy \quad (\text{für } y \neq 0 \text{ ist } \delta(y) = 0, \text{ für } y = 0 \text{ ist } h(x-y) = h(x)) \\ &= h(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \\ &= h(x).\end{aligned}$$

(Wieder ist $\stackrel{!}{=}$ etwas windig ...)

Ein Beispiel: Die anfängliche Konzentration einer gelösten Substanz sei im Wasser $= c'$, im Boden $= 0$. Wie diffundiert die Substanz? Hier ist also

$$h(x) = \begin{cases} c' & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}.$$

Daher ist die Lösung

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) \cdot h(x-y) dy \quad \text{mit } h(x-y) = \begin{cases} c' & : y \leq x \\ 0 & : y > x \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^x g(y, t) \cdot c' dy \\ &= c' \cdot \int_{-\infty}^x g(y, t) dy.\end{aligned} \tag{V.5}$$

Die Lösung kann mit Hilfe des Gaußschen Fehlerintegrals

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du$$

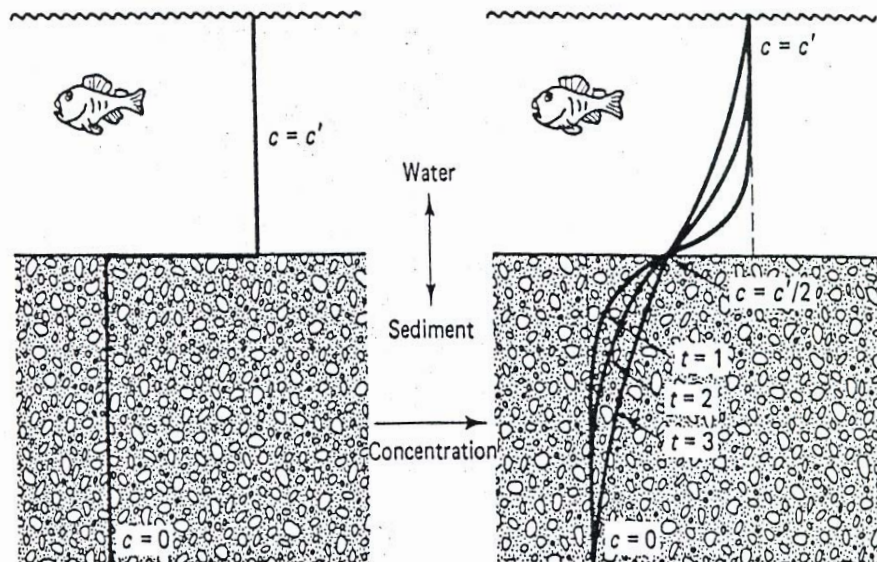
ausgedrückt werden; Φ ist in der Statistik als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bekannt. (g entspricht der Dichte einer Normalverteilung mit Varianz $2Dt$). Aus (V.5) erhält man nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= c' \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-y^2/(4Dt)} dy \\ &= c' \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2Dt}} e^{-u^2/2} du \quad \left(\text{Substitution } u = \frac{y}{\sqrt{2Dt}}, du = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} dy\right) \\ &= c' \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right)\end{aligned}$$

Φ hat die Eigenschaften

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 1, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Also ist für alle Zeiten $\varphi(0, t) = c'/2$.



Literaturhinweise

Hier ein paar Bücher, die zu dieser Vorlesung passen.

- Ihr Schulbuch.
- W. Scharlau: Schulwissen Mathematik. Vieweg.

Mit dem Schulwissen kann man sofort zwei Drittel des ersten Semesters meistern! Das folgende Buch ist für beide Teile sehr empfehlenswert:

- M. Precht, K. Voit, R. Kraft: Mathematik für Nichtmathematiker, Band 2. Oldenbourg.

Die meisten Mathematikbücher, die in etwa den Stoff der Vorlesung in Umfang und Niveau enthalten, richten sich an Biologiestudenten und haben entsprechendes Beispielmateriale. Hier ein paar Titel:

- E. Batschelet: Mathematics For Life Scientists. Springer.
- W. Timischl: Biomathematik. Springer.
- H. Vogt: Grundkurs Mathematik für Biologen. Teubner.
- A. Steland: Mathematische Grundlagen der empirischen Forschung. Springer.
- H.A. Braunß, H. Junek, Th. Krainer: Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften. Birkhäuser.
- P. Harmand: Mathematische Methoden in den Biowissenschaften.
<ftp://gauss.mathematik.uni-oldenburg.de/pub/Vorlesungen/MathMethodenBio/skript>.