

Ray Ryan: Introduction To Tensor Products Of Banach Spaces

Im Jahre 1956 veröffentlichte A. Grothendieck seine Arbeit *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, in der er seine Untersuchungen über normierte Tensorprodukte niederlegte. In dieser Arbeit beschreibt er verschiedene Wege, das Tensorprodukt zweier Banachräume zu normieren; insbesondere entwickelt er einen Kalkül für Tensornormen, und er beweist sein Hauptergebnis, das er *Théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels* nennt und welches die Äquivalenz gewisser Tensornormen zeigt. Was Grothendiecks Methoden angeht, ist hervorzuheben, dass er die Bedeutung sowohl der endlichdimensionalen Struktur eines Banachraums erkennt als auch die der Approximationseigenschaft, und damit war er seiner Zeit weit voraus.

Aus verschiedenen Gründen war (und ist) diese Arbeit schwer zu lesen: Zum einen ist sie in einer nicht sehr verbreiteten Zeitschrift erschienen, dann werden Beweise fast stets nur skizziert, und schließlich stellt das Sujet selbst, Tensorprodukte normierter Räume, hohe Anforderungen selbst an Spezialisten. So blieb es nicht aus, dass das *Résumé* über Jahre unbeachtet blieb, bis es von J. Lindenstrauss und A. Pełczyński einem weiteren Leserkreis vorgestellt wurde, als sie in ihrer Arbeit *Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p -spaces and their applications* (Studia Math. 1968) viele der Grothendieckschen Resultate in einer für Normalsterbliche eher verständlichen Sprache wiedergaben; z.B. zeigten sie, dass das *Théorème fondamental* äquivalent als Matrixungleichung geschrieben werden kann, die seither als *Grothendiecksche Ungleichung* bekannt ist.

Die meisten Arbeiten, die in der Folge publiziert wurden, stützten sich auf den Lindenstrauss-Pełczyńskischen Ansatz, der Operatoren gegenüber Tensoren favorisiert. Das Ziel des vorliegenden Buches von Ray Ryan ist es, die Grothendiecksche Theorie wieder in der Sprache der Tensoren zu formulieren, wobei natürlich auch die Operatorenideale zu ihrem Recht kommen. Ein wesentliches Anliegen des Autors ist es, mit seinem Text nicht nur Spezialisten auf dem Gebiet zu erreichen, sondern auch Novizen. Diesem Anspruch wird das Buch voll gerecht.

Im ersten Kapitel wird der Begriff des Tensorproduktes linearer Räume X und Y vorgestellt. Der Zugang, den Ryan wählt, ist ziemlich konkret; $x \otimes y$ wird als kanonisches lineares Funktional auf dem Raum der Bilinearformen auf $X \times Y$ eingeführt. Die nächsten beiden Kapitel widmen sich den „klassischen“ Normen auf Tensorprodukten, nämlich der injektiven (oder ε -) und der projektiven (oder π -) Norm. Nebenbei erfährt der Leser einiges über das Bochner-Integral, Rademacher-Funktionen und die Khinchin-Ungleichung, nukleare Operatoren und vieles mehr. Kapitel 4 und 5 behandeln zwei Aspekte, die für die Geometrie der Banachräume insgesamt von Bedeutung sind: die Approximationseigenschaft und die Radon-Nikodym-Eigenschaft. Speziell findet man in diesen Kapiteln auch das Prinzip der lokalen Reflexivität, die Dunford-Pettis-Eigenschaft, Darstellungssätze für Operatoren etc.

Die allgemeine Theorie normierter Tensorprodukte bildet den Gegenstand von Kapitel 6 und 7. Zentral sind hier der Begriff der endlich erzeugten Tensornorm sowie der damit einhergehende Kalkül der assoziierten und dualen Nor-

men. Damit können die 14 natürlichen Normen von Grothendieck und auch die Chevet-Saphar-Normen diskutiert werden, die eng mit den p -nuklearen und absolut p -summierenden Operatoren zusammenhängen, welche ebenfalls ausführlich besprochen werden. Höhepunkt ist selbstverständlich Grothendiecks *Théorème fondamental*, das zuerst als Matrixungleichung bewiesen und dann in der Sprache der Tensorprodukte wiedergegeben wird. Das letzte Kapitel schließlich stellt den Zusammenhang von Tensorprodukten und Operatorenidealen her.

Ray Ryans Buch ist hervorragend geeignet, einen Leser, der über das üblicherweise in zwei Semestern vermittelte funktionalanalytische Grundwissen verfügt, in ein wichtiges Gebiet der Banachraumtheorie einzuführen. Aber auch für diejenigen, die bloß leicht zugängliche und ebenso leicht verständliche Informationen über Begriffe wie Approximationseigenschaft, das Bochner-Integral, p -summierende Operatoren etc. suchen, ist das Werk wärmstens zu empfehlen. Die Darstellung ist in jeder Zeile klar und elegant, und stets spürt man die Sympathie des Autors für die Leser. Als weiteren Pluspunkt empfinde ich die angenehme Typographie und das fast vollständige Fehlen von Tippfehlern.

Leider behindert der Verlag eine weite Verbreitung dieses schönen Buches durch die Festsetzung eines vollkommen unangemessenen Preises: Inklusive Mehrwertsteuer kostet es bei 225 Seiten über 80 Euro.

Ray Ryan: Introduction To Tensor Products Of Banach Spaces. Springer Verlag 2002; 74.95 Euro + Mehrwertsteuer.