# Une remarque sur la propriété de Dunford-Pettis

*par Dirk WERNER*

Dans [5] (voir aussi [3, p. 148]) nous avons démontré que l'espace $S$ de Schreier est un $M$-idéal de son bidual, c'est-à-dire dans la décomposition canonique du troisième dual de $S$ en une somme de $S^*$ et de l'orthogonal $S^\perp$ de $S$ la norme est additive:

$$S^{***} = S^* \oplus_1 S^\perp.$$

Les auteurs de [1] ont étendu cet énoncé à certains espaces de Banach $S_{\mathcal{F}}$ reliés à $S$. De plus, ils ont montré pour un espace $S_{\mathcal{F}}$ qui est un $M$-idéal que tout sous-espace de $S_{\mathcal{F}}$ a la propriété de Dunford-Pettis dès que l'espace $S_{\mathcal{F}}$ l'ait. Le but de cet exposé est de démontrer un résultat plus fort par une méthode un peu plus simple.

Commençons par quelques rappels. D'après Grothendieck [2] on dit qu'un espace de Banach $X$ jouit de la propriété de Dunford-Pettis si l'on a $x_n^*(x_n) \to 0$ pour toutes les suites $(x_n) \subset X$, $(x_n^*) \subset X^*$ convergentes vers zéro faiblement. Quand tous les sous-espaces de $X$ ont la propriété de Dunford-Pettis, on dit que $X$ a la propriété de Dunford-Pettis héréditaire. Grothendieck a montré que les espaces $\mathcal{C}(K)$ ont la propriété de Dunford-Pettis et que $c_0$ a même la propriété de Dunford-Pettis héréditaire.

Les espaces $S_{\mathcal{F}}$ que nous allons considérer ici sont définis comme suit. Soit $\mathcal{F}$ une famille «adéquate» (dans la terminologie de [1]) d'ensembles de $\mathbb{N}$; ceci signifie que

(a) si $G \subset F \in \mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{F}$,

(b) $\{n\} \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(c) si $Z \subset \mathbb{N}$ est infini, il existe un sous-ensemble fini $B \subset Z$ tel que $B \notin \mathcal{F}$.

Soit $S_{\mathcal{F}}$ la complétion de l'espace de suites à support fini pour la norme

$$\|(\xi_n)\|_{\mathcal{F}} = \sup\Big\{\sum_{n\in F} |\xi_n|\colon\ F \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Pour un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ infini on pose $S_{\mathcal{F}}(A) = \{(\xi_n) \in S_{\mathcal{F}}\colon\ \xi_n = 0\ \forall n \notin A\}$.

En prenant $\mathcal{F}$ la classe d'ensembles «admissibles» (c'est-à-dire $\operatorname{card} F \leq \min F$) on obtient l'espace de Schreier $S$ (néo-)classique. Dans [1] se trouvent beaucoup d'exemples d'espaces $S_{\mathcal{F}}$ qui sont des $M$-idéaux.

On va montrer le théorème suivant.

**Théorème.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille adéquate telle que $S_{\mathcal{F}}$ soit un $M$-idéal. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) *$S_{\mathcal{F}}$ a la propriété de Dunford-Pettis.*

(ii) *$S_{\mathcal{F}}$ a la propriété de Dunford-Pettis héréditaire.*

(iii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a seulement un nombre fini de $F \in \mathcal{F}$ contenant $n$.*

(iv) *Il n'y a pas de sous-suites de la base duale canonique $(e_n^*)$ de $S_{\mathcal{F}}^*$ convergente vers zéro faiblement.*

(v) *$S_{\mathcal{F}}$ se plonge isométriquement dans $c_0$ en cas réel et presque isométriquement dans $c_0$ en cas complexe.*

(vi) *$S_{\mathcal{F}}$ se plonge isomorphiquement dans $c_0$.*

*Démonstration.* (vi) $\Rightarrow$ (ii): C'est un théorème de Grothendieck [2, p. 171]. Voici sa preuve jolie et simple: Soit $E \subset c_0$ un sous-espace fermé, et soient $(x_n) \subset E$ et $(x_n^*) \subset E^*$ des suites telles que $x_n \to 0$ et $x_n^* \to 0$ faiblement. On peut supposer $(x_n)$ normalisée; dans ce cas il est facil de produire une sous-suite $(x_{n_k})$ qui est équivalente à la base canonique de $c_0$. Soit $F = \overline{\operatorname{lin}}\{x_{n_k}\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ et $y_k^* = x_{n_k}^*|_F$; alors $y_k^* \to 0$ faiblement et, car $F^*$ est isomorphe à $\ell^1$ et par conséquent possède la propriété de Schur, $\|y_k^*\| \to 0$. On en déduit que $x_{n_k}^*(x_{n_k}) \to 0$. Comme le même argument s'applique aux sous-suites de $(x_n)$, ceci montre aussi que $x_n^*(x_n) \to 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): C'est trivial.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Sinon, l'opérateur d'inclusion $S_{\mathcal{F}}(A) \hookrightarrow c_0(A)$ serait faiblement compact pour un ensemble infini $A \subset \mathbb{N}$. Maintenant on rapelle qu'un opérateur faiblement compact sur un espace ayant la propriété de Dunford-Pettis transforme des suites faiblement convergentes en des suites fortement convergentes. Bien sûr, $S_{\mathcal{F}}(A)$, étant un sous-espace complémenté de $S_{\mathcal{F}}$, jouit de la propriété de Dunford-Pettis. Par conséquent, on aurait $\|e_n\|_\infty \to 0$ ($n \to \infty$, $n \in A$) ici, qui est absurde.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Nous suivons la démonstration donnée dans [1]. Si (iii) était faux pour un $n$, il y aurait un ensemble infini $A$ tel que $\{n, m\} \in \mathcal{F}$ pour tout $m \in A$. En appliquant (iv) on obtient $B \subset A$ infini, $\delta > 0$ et $x^{**} = (\xi_k) \in S_{\mathcal{F}}^{**}$ avec $\|x^{**}\|_{\mathcal{F}} \leq 1$ et $|\xi_m| \geq 2\delta$ pour tout $m \in B$. Alors

$$\begin{aligned} \|x^{**} \pm e_n - y\|_{\mathcal{F}} &\geq \sup_{m\in B} (|\xi_n \pm 1 - \eta_n| + |\xi_m + \eta_m|) \\ &\geq 1 + \delta \qquad \forall y = (\eta_k) \in S_{\mathcal{F}},\ \|y\|_{\mathcal{F}} \leq 1 \end{aligned}$$

ce qui contredit la propriété d'intersection des boules qui caracterise les $M$-idéaux ([3, Th. I.2.2], [5]).

(iii) $\Rightarrow$ (v): On dénote $\ell^1(N)$ l'espace $\ell^1$ à dimension $N$ et on considère l'application

$$T\colon S_{\mathcal{F}} \to \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \ell^1(\operatorname{card} F)\Big)_{\ell^\infty}, \quad (\xi_n) \mapsto ((\xi_n)_{n\in F})_{F\in\mathcal{F}}.$$

Par la définition de la norme $\| \,.\, \|_{\mathcal{F}}$ c'est une isométrie. La condition (iii) entraîne que $Te_k \in (\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \ell^1(\operatorname{card} F))_{c_0}$; donc on a isométriquement

$$S_{\mathcal{F}} \cong T(S_{\mathcal{F}}) \subset \Big(\bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \ell^1(\operatorname{card} F)\Big)_{c_0} \subset (\bigoplus \ell^1(n))_{c_0}.$$

Mais $\ell^1(n)$ est isométrique à un sous-espace de $c_0$ dans le cas réel; dans le cas complexe $\ell^1(n)$ est presque isométrique à un sous-espace de $c_0$ (c'est à dire qu'il y a, pour tout $\varepsilon > 0$, un sous-espace $E_\varepsilon$ de $c_0$ satisfaisant $d(\ell^1(n), E_\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon$, où $d$ dénote la distance Banach-Mazur). Ceci montre que $S_{\mathcal{F}}$ se plonge (presque) isométriquement dans $c_0$.

(v) $\Rightarrow$ (vi): De nouveau, c'est trivial.

Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) sont contenues dans [1]; la nouvelle contribution ici est l'observation que (iii) implique aisément (v). Remarquons que l'hypothèse ≪$S_{\mathcal{F}}$ est un $M$-idéal≫ n'est utilisée que dans l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii).

En cas complexe on ne peut pas toujours avoir un plongement isométrique. À titre d'exemple soit $\mathcal{F} = \{\{1,2\}\} \cup \{\{n\}\colon n \in \mathbb{N}\}$. Alors $S_{\mathcal{F}} \cong \ell^1(2) \oplus_\infty c_0$, et l'espace complexe $\ell^1(2)$ n'est pas isométrique à un sous-espace de l'espace complexe $c_0$.

J'ignore si les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (vi) (ou au moins une d'elles) restent valables pour un espace $M$-idéal de son bidual général. Signalons qu'un tel espace $X$ est un Asplund, donc la propriété de Dunford-Pettis de $X$ équivaut à la propriété de Schur de $X^*$. Notons aussi qu'il y a des renormages de $c_0$ qui sont des $M$-idéaux, mais qui ne se plongent pas presque isométriquement dans $c_0$; en effet, l'espace $\Lambda(N)$ de Kalton ([4] ou [3, p. 322]) pour la norme $N$ de $\mathbb{R}^2$, dont la boule unité est le convexe engendré par les points $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, \pm \frac{1}{2})$, sert comme exemple.

## Références bibliographiques


[1] J. M. F. Castillo, F. Sánchez et M. González. *M-ideals of Schreier type and the Dunford-Pettis property*. Dans: S. González, éditeur, *Non-Associative Algebras and Its Applications*, pages 80–85. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[2] A. GROTHENDIECK. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$.* Canadian J. Math. **5** (1953), 129–173.

[3] P. HARMAND, D. WERNER ET W. WERNER. *$M$-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras.* Lecture Notes in Math. 1547. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[4] N. J. KALTON. *$M$-ideals of compact operators.* Illinois J. Math. **37** (1993), 147–169.

[5] D. WERNER. *New classes of Banach spaces which are $M$-ideals in their biduals.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **111** (1992), 337–354.

I. Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin, Arnimallee 2–6,
D-14 195 Berlin, Allemagne; e-mail: werner@math.fu-berlin.de