III.5 Differentiation nichtlinearer Abbildungen

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Abstecher in die nichtlineare Funktionalanalysis unternommen werden. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Ableitung. Wir werden im folgenden nur reelle Vektorräume betrachten, und h steht für eine (hinreichend kleine) reelle Zahl.

Definition III.5.1 Seien X und Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $f\colon U \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *Gâteaux-differenzierbar* bei $x_0 \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T \in L(X,Y)$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h} = Tv \qquad \forall v \in X \tag{III.10}$$

existiert. (Es ist klar, daß $f(x_0+hv)$ für betragsmäßig hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}$ erklärt ist, nämlich für $|h| \le \alpha/\|v\|$, falls $\{x\colon \|x-x_0\| \le \alpha\} \subset U$.)

(b) f heißt *Fréchet-differenzierbar* bei $x_0 \in U$, falls die Konvergenz in (III.10) gleichmäßig bezüglich $v \in B_X$ ist.

(c) f heißt Gâteaux- bzw. Fréchet-differenzierbar auf U, falls f an jeder Stelle $x_0 \in U$ Gâteaux- bzw. Fréchet-differenzierbar ist. Der Grenzwert in (III.10) hängt dann von x_0 ab; wir schreiben $Df(x_0)$ statt T. Df heißt die Gâteaux- bzw. Fréchet-Ableitung von f.

Beachte: Die Ableitung von f an einer Stelle ist ein linearer Operator, die Ableitung von f als Funktion ist eine operatorwertige Abbildung $Df\colon U \to L(X,Y)$.

Die Fréchet-Ableitung reflektiert die Idee der linearen Approximation, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma III.5.2 *Mit den Bezeichnungen von Definition* III.5.1 *ist eine Abbildung $f\colon U \to Y$ genau dann Fréchet-differenzierbar bei $x_0 \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T \in L(X,Y)$ mit*

$$f(x_0+u) = f(x_0) + Tu + r(u), \ \textit{wo} \ \lim_{\|u\|\to 0} \frac{r(u)}{\|u\|} = 0, \tag{III.11}$$

existiert. In diesem Fall ist $Df(x_0) = T$.

Ausführlich lautet die Grenzwertbeziehung in (III.11)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \|u\| \le \delta \Rightarrow \|r(u)\| \le \varepsilon \|u\|.$$

Beweis. Gelte gleichmäßige Konvergenz in (III.10). Setze dann $r(u) = f(x_0+u) - f(x_0) - Tu$; mit $v = u/\|u\|$ und $\|u\| \to 0$ folgt

$$\frac{r(u)}{\|u\|} = \frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{\|u\|} - T\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big) = \frac{f(x_0 + \|u\|v) - f(x_0)}{\|u\|} - Tv \to 0.$$

Gelte umgekehrt (III.11). Für $v \in B_X$ und $h \to 0$ hat man dann

$$\begin{aligned} \left\|\frac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h} - Tv\right\| &= \|v\| \left\|\frac{f(x_0+hv) - f(x_0) - T(hv)}{h\|v\|}\right\| \\ &= \|v\| \frac{\|r(hv)\|}{\|hv\|} \ \to\ 0, \end{aligned}$$

und zwar gleichmäßig in $v \in B_X$. □

In Worten ist die Aussage von (III.11), daß man $f(x_0+u)$ durch $f(x_0) + Df(x_0)(u)$ mit einem Fehler $\le \varepsilon\|u\|$ approximieren kann, wenn nur $\|u\| \le \delta$ ist. Sind X und Y endlichdimensional, ist die Fréchet-Differenzierbarkeit also nichts anderes als die totale Differenzierbarkeit, während die Gâteaux-Differenzierbarkeit mit der Existenz der Richtungsableitungen verwandt ist. (Manche Autoren verlangen nicht die Linearität der Gâteaux-Ableitung.) Wie im Endlichdimensionalen impliziert die Fréchet-Differenzierbarkeit die Stetigkeit, die Gâteaux-Differenzierbarkeit jedoch nicht (Beispiel?).

Beispiele. (a) Ist f konstant, so ist klar, daß f Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) = 0$ für alle x_0 ist.

(b) Ist $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung, so ist f genau dann Gâteaux-differenzierbar, wenn f stetig ist, da ja für lineares f

$$\frac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h} = f(v).$$

In diesem Fall ist f auch Fréchet-differenzierbar mit $Df(x_0) = f$ für alle x_0; Df ist also eine konstante operatorwertige Abbildung.

(c) Sei $f\colon C[0,1] \to C[0,1]$ durch $f(x) = x^2$ definiert. Dann ist

$$\frac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0^2 + 2hx_0v + h^2v^2 - x_0^2}{h} = 2x_0v + hv^2.$$

Es folgt, daß der Grenzwert für $h \to 0$ gleichmäßig in $v \in B_{C[0,1]}$ existiert, und zwar ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h} = 2x_0v =: M_{2x_0}v.$$

f ist daher Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) = M_{2x_0}$ = Multiplikationsoperator mit $2x_0$.

(d) Die gleiche Rechnung funktioniert für den Quadratoperator $f\colon L^2 \to L^1$, $f(x) = x^2$; f ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Auch hier ist $Df(x_0) = M_{2x_0}$, aber der Multiplikationsoperator wird diesmal als Operator von L^2 nach L^1 aufgefaßt.

(e) Sei $f\colon L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu(t)$ definiert. Wir untersuchen die Differenzierbarkeit dieses nichtlinearen Funktionals im Fall $1 < p < \infty$ und setzen wie üblich $1/p + 1/q = 1$. Sei $x_0 \in L^p(\mu)$ fest. Zu $v \in L^p(\mu)$ assoziiere die Hilfsfunktion $\varphi(h) = f(x_0 + hv)$; wir zeigen, daß φ differenzierbar ist. Differenziert man formal unter dem Integral, erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= \frac{d}{dh} \int_\Omega |x_0(t) + hv(t)|^p \, d\mu(t) \\ &\overset{(*)}{=} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial h} |x_0(t) + hv(t)|^p \, d\mu(t) \\ &= \int_\Omega p|x_0(t) + hv(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0(t) + hv(t)) v(t) \, d\mu(t); \end{aligned}$$

beachte, daß für $p > 1$ die reelle Funktion $s \mapsto |s|^p$ differenzierbar ist mit der Ableitung $s \mapsto p|s|^{p-1} \operatorname{sgn}(s)$. Wenn man $(*)$ legitimieren kann, folgt die Gâteaux-Differenzierbarkeit von f mit

$$Df(x_0)(v) = \varphi'(0) = p \int_\Omega |x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0(t)) v(t) \, d\mu(t);$$

$Df(x_0)$ ist also das durch $p|x_0|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0) \in L^q(\mu) \cong (L^p(\mu))'$ dargestellte lineare Funktional.

Zur Begründung von $(*)$ verwenden wir Korollar A.3.3; für $|h| \le 1$ hat man nämlich die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial}{\partial h} |x_0(t) + hv(t)|^p \right| = p|x_0(t) + hv(t)|^{p-1} |v(t)| \le p(|x_0(t)| + |v(t)|)^{p-1} |v(t)|;$$

und das ist nach der Hölderschen Ungleichung eine L^1-Funktion, denn $w := |x_0| + |v| \in L^p(\mu)$ impliziert wegen $(p-1)q = p$, daß $w^{p-1} \in L^q(\mu)$.

f ist sogar Fréchet-differenzierbar. Dazu sei (v_n) eine Folge in der Einheitskugel von $L^p(\mu)$ und $h_n \to 0$, dann ist

$$\int_\Omega \left(\frac{|x_0(t) + h_n v_n(t)|^p - |x_0(t)|^p}{h_n} - p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0(t)) v_n(t) \right) d\mu(t) \to 0$$

zu zeigen. Stellt man den Bruch an jeder Stelle t mit Hilfe des Mittelwertsatzes dar, lautet die Aufgabe,

$$\begin{aligned} p \int_\Omega \Big(\big| x_0(t) + \vartheta_n(t) h_n v_n(t) \big|^{p-1} \operatorname{sgn}\big(x_0(t) + \vartheta_n(t) h_n v_n(t)\big) - \\ |x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0(t)) \Big) v_n(t) \, d\mu(t) \to 0 \end{aligned}$$

zu beweisen, wo $0 < \vartheta_n(t) < 1$. Nach der Hölderschen Ungleichung kann dieser Ausdruck nach oben durch

$$p\| |x_0 + h_n\vartheta_n v_n|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0 + h_n\vartheta_n v_n) - |x_0|^{p-1} \operatorname{sgn}(x_0)\|_q \|v_n\|_p$$

abgeschätzt werden; beachte, daß ϑ aufgrund seiner Konstruktion meßbar ist. Schreibe nun $x_n = x_0 + h_n\vartheta_n v_n$ und $\Phi(x) = |x|^{p-1} \operatorname{sgn}(x)$ für $x \in L^p(\mu)$. Es gilt dann $x_n \to x_0$ in der Norm von $L^p(\mu)$, und es muß $\Phi(x_n) \to \Phi(x_0)$ in der Norm von $L^q(\mu)$ geschlossen werden. Eine Teilfolge (x_{n_k}) konvergiert fast überall gegen x_0 (vgl. z.B. Rudin [1986], Theorem 3.12); es folgt $\Phi(x_{n_k}) \to \Phi(x_0)$ fast überall sowie $\|\Phi(x_{n_k})\|_q = \|x_{n_k}\|_p \to \|x_0\|_p = \|\Phi(x_0)\|_q$, und die Integrationstheorie lehrt, daß dann $\|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x_0)\|_q \to 0$ (siehe Rudin [1986], S. 73). Daraus ergibt sich die gewünschte Konvergenz, und die Fréchet-Differenzierbarkeit von f ist gezeigt.

(f) Wir untersuchen die kanonische Norm des Folgenraums ℓ^1 auf Differenzierbarkeit, betrachten also $f(x_0) = \|x_0\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |s_n|$ für $x_0 = (s_n) \in \ell^1$. Sei e_k der k-te Einheitsvektor in ℓ^1. Die Frage, ob der Grenzwert in (III.10) für $v = e_k$ existiert, läuft dann darauf hinaus,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|s_k + h| - |s_k|}{h}$$

zu bestimmen; und man erkennt, daß der Grenzwert genau dann existiert, wenn $s_k \neq 0$ ist, und dann beträgt er $\operatorname{sgn} s_k$. Daraus folgt als notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit der Norm bei $x_0 = (s_n)$, daß alle $s_n \neq 0$ sind. Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Gâteaux-Differenzierbarkeit; als Kandidat für die Ableitung kommt nach unseren Vorüberlegungen nämlich nur das durch $(\operatorname{sgn} s_n) \in \ell^\infty \cong (\ell^1)'$ dargestellte lineare Funktional ℓ in Frage, und in der Tat gilt für jedes $v = (t_n) \in \ell^1$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^\infty \frac{|s_n + ht_n| - |s_n|}{h} = \ell(v) = \sum_{n=1}^\infty (\operatorname{sgn} s_n) t_n.$$

Zunächst hat man nämlich für jedes n die Abschätzung

$$\left| \frac{|s_n + ht_n| - |s_n| - h(\operatorname{sgn} s_n)t_n}{h} \right| = \left| \frac{|1 + ht_n/s_n| - 1 - ht_n/s_n}{h/|s_n|} \right| \le 2|t_n|,$$

da $|1+x| - (1+x) = 0$ für $x \ge -1$ und $= -2-2x$ für $x < -1$. Wählt man nun zu $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N so, daß $\sum_{n>N} |t_n| \le \varepsilon$ ausfällt, erhält man

$$\left| \sum_{n=1}^\infty \frac{|s_n + ht_n| - |s_n| - h(\operatorname{sgn} s_n)t_n}{h} \right| \le \sum_{n=1}^N |\ldots| + \sum_{n=N+1}^\infty |\ldots|,$$

und die erste, endliche Summe strebt mit $h \to 0$ gegen 0, da alle $s_n \neq 0$ sind, wohingegen die zweite Summe unabhängig von h durch 2ε majorisiert wird.

Andererseits ist die ℓ^1-Norm nach Lemma III.5.2 an keiner Stelle Fréchet-differenzierbar, da für $x_0 = (s_n)$ und $v_k = -2s_k e_k$

$$\frac{\|x_0 + v_k\|_1 - \|x_0\|_1 - \ell(v_k)}{\|v_k\|_1} = 1.$$

Es ist häufig wichtig zu wissen, ob die Norm eines normierten Raums differenzierbar ist. Dies kann folgendermaßen geometrisch charakterisiert werden.

Satz III.5.3 *Die Normfunktion $f\colon x \mapsto \|x\|$ auf einem normierten Raum X ist bei x_0 mit $\|x_0\| = 1$ genau dann Gâteaux-differenzierbar, wenn es genau ein stetiges lineares Funktional $x_0' \in X'$ mit $\|x_0'\| = x_0'(x_0) = 1$ gibt; in diesem Fall ist $Df(x_0) = x_0'$. Die Normfunktion ist bei x_0 genau dann Fréchet-differenzierbar, wenn das obige x_0' zusätzlich die Eigenschaft*

$$x_n' \in X',\ \|x_n'\| \le 1,\ x_n'(x_0) \to 1 \quad \Rightarrow \quad \|x_n' - x_0'\| \to 0 \tag{III.12}$$

besitzt.

Beweis. Sei zunächst f bei x_0 Gâteaux-differenzierbar mit Ableitung $x_0' \in X'$. Aus (III.10) ergibt sich dann sofort $x_0'(x_0) = 1$ und $\|x_0'\| \le 1$ wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung, also sogar $\|x_0'\| = 1$. Sei x_1' ein weiteres Funktional mit diesen Eigenschaften. Für $v \in X$ und $h > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} x_0'(v) - x_1'(v) &= \frac{x_0'(x_0 + hv) + x_1'(x_0 - hv) - 2}{h} \\ &\le \frac{\|x_0 + hv\| - 1}{h} + \frac{\|x_0 - hv\| - 1}{h}, \end{aligned}$$

was mit $h \to 0$ gegen $x_0'(v) + x_0'(-v) = 0$ konvergiert. Daher ist $x_0'(v) - x_1'(v) \le 0$ für alle $v \in X$ und deshalb (ersetze v durch $-v$) $x_0' = x_1'$.

Ist f bei x_0 Fréchet-differenzierbar und ist (x_n) eine Folge wie in (III.12), gilt nach Lemma III.5.2

$$\begin{aligned} x_0'(v) - x_n'(v) &= x_0'(x_0 + v) + x_n'(x_0 - v) - 1 - x_n'(x_0) \\ &\le \|x_0 + v\| - \|x_0\| + \|x_0 - v\| - \|x_0\| + 1 - x_n'(x_0) \\ &= x_0'(v) + r(v) + x_0'(-v) + r(-v) + 1 - x_n'(x_0) \\ &= r(v) + r(-v) + 1 - x_n'(x_0). \end{aligned}$$

Mit $\|r(v)\|/\|v\| \to 0$ erhält man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\|r(v)\| \le \varepsilon\|v\| \qquad \forall \|v\| \le \delta.$$

Wählt man n_0 so, daß

$$1 - x_n'(x_0) \le \delta\varepsilon \qquad \forall n \ge n_0,$$

so folgt für diese n und alle $\|v\| = \delta$

$$x_0'(v) - x_n'(v) \le 3\delta\varepsilon$$

und deshalb

$$\|x_n' - x_0'\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|v\|=1} \bigl(x_0'(\delta v) - x_n'(\delta v)\bigr) \le 3\varepsilon \qquad \forall n \ge n_0.$$

Wir beweisen jetzt die Umkehrungen. Sei $\|x_0\| = 1$. Als erstes beobachten wir, daß für jedes $v \in X$ die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} p^+(v) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\|x_0 + hv\| - 1}{h} \\ p^-(v) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\|x_0 + hv\| - 1}{h} \end{aligned}$$

existieren. Die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ erklärte Funktion φ: $h \mapsto (\|x_0 + hv\| - 1)/h$ ist nämlich monoton wachsend: Für $0 < h_1 < h_2$ zeigt eine Anwendung der Dreiecksungleichung, daß

$$\begin{aligned} \|x_0 + h_1 v\| - 1 &= \left\| \frac{h_1}{h_2}(x_0 + h_2 v) + \Bigl(1 - \frac{h_1}{h_2}\Bigr) x_0 \right\| - 1 \\ &\le \frac{h_1}{h_2}\|x_0 + h_2 v\| + \Bigl(1 - \frac{h_1}{h_2}\Bigr) - 1 \\ &= h_1 \frac{\|x_0 + h_2 v\| - 1}{h_2}, \end{aligned}$$

weswegen φ auf $(0, \infty)$ monoton wächst. Analog sieht man die Monotonie auf $(-\infty, 0)$, und schließlich gilt $\varphi(-h) \le \varphi(h)$ für positive h, denn diese Ungleichung ist zu $2 \le \|x_0 + hv\| + \|x_0 - hv\|$ äquivalent, was nach der Dreiecksungleichung richtig ist. Damit ist die Existenz der obigen Grenzwerte gezeigt, und außerdem sieht man, daß

$$p^-(v) \le p^+(v) \qquad \forall v \in X.$$

Ferner ergibt sich – wieder aus der Dreiecksungleichung –, daß p^+ sublinear ist; beachte noch $p^+(v) = -p^-(-v)$ nach Definition dieser Größen.

Um die Gâteaux-Differenzierbarkeit der Norm bei x_0 zu beweisen, muß man nur $p^- = p^+$ zeigen. Sei dazu $v_0 \in X$ fest gewählt. Für $p^-(v_0) \le \alpha \le p^+(v_0)$ definiert $\lambda v_0 \mapsto \lambda\alpha$ ein lineares Funktional ℓ auf $\operatorname{lin}\{v_0\}$, das dort von p^+ majorisiert wird; beachte

$$\ell(-v_0) = -\alpha \le -p^-(v_0) = p^+(-v_0).$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach (Satz III.1.2) existiert ein lineares Funktional $x' \leq p^+$, das ℓ fortsetzt. Dieses ist stetig mit Norm ≤ 1, da nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$x'(v) \leq p^+(v) \leq |p^+(v)| \leq \|v\| \qquad \forall v \in X.$$

Schließlich ist

$$-x'(x_0) = x'(-x_0) \leq p^+(-x_0) = -1,$$

so daß sich aus $\|x'\| \leq 1$ auch $x'(x_0) = 1$ ergibt. Wenn es nur ein Funktional mit diesen Eigenschaften gibt, muß notwendig $p^-(v_0) = \alpha = p^+(v_0)$ gewesen sein; da v_0 beliebig war, ist $p^- = p^+$ und damit die Gâteaux-Differenzierbarkeit bei x_0 gezeigt.

Wir kommen zum Schluß zur Fréchet-Differenzierbarkeit unter der Bedingung (III.12). Sei (v_n) eine Nullfolge; es ist nach Lemma III.5.2

$$\frac{\|x_0 + v_n\| - 1 - x_0'(v_n)}{\|v_n\|} \to 0$$

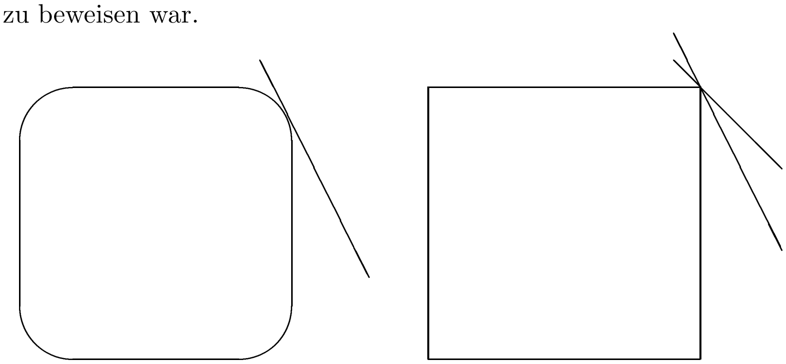
zu zeigen. Da $x_0'(x_0) = 1 = \|x_0'\|$, ist der Ausdruck ≥ 0. Wähle gemäß Korollar III.1.6 Funktionale $x_n' \in B_{X'}$ mit $x_n'(x_0 + v_n) = \|x_0 + v_n\|$. Da dann wegen $v_n \to 0$

$$x_n'(x_0) = x_n'(x_0 + v_n) - x_n'(v_n) = \|x_0 + v_n\| - x_n'(v_n) \to 1,$$

folgt nach Voraussetzung (III.12) $\|x_n' - x_0'\| \to 0$ und deshalb

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|x_0 + v_n\| - 1 - x_0'(v_n)}{\|v_n\|} \\ &= \frac{(x_n' - x_0')(v_n) + x_n'(x_0) - 1}{\|v_n\|} \\ &\leq \frac{(x_n' - x_0')(v_n)}{\|v_n\|} \;\leq\; \|x_n' - x_0'\| \;\to\; 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □



Hier sind die Einheitskugeln zweier Normen sowie einige „Stützhyperebenen“ $\{x\colon x_0'(x) = 1 = \|x_0'\|\}$ skizziert; die linke Norm ist an jeder Stelle $\neq 0$ Gâteaux-differenzierbar (eine solche Norm nennt man *glatt*), die rechte nicht, wie man aus Satz III.5.3 schließt; man kann regelrecht fühlen, daß sie nicht glatt ist. Zur Dualität von Konvexitäts- und Glattheitseigenschaften vgl. Aufgabe III.6.31.

Beispiel. (g) Die kanonische Norm von $L^2(\mu)$ ist an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Fréchet-differenzierbar. Wegen der positiven Homogenität der Norm reicht es, den Fall $\|x_0\|_2 = 1$ zu betrachten. Nach Satz II.2.4 kann jedes Funktional durch ein normgleiches y_0 gemäß $\ell_{y_0}(x) = \int xy_0\,d\mu$ dargestellt werden. Das durch x_0 dargestellte Funktional hat dann die Eigenschaft $\ell_{x_0}(x_0) = 1 = \|\ell_{x_0}\|$, und aus Aufgabe I.4.13 folgt, daß es bzgl. dieser Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Seien nun $x_n \in L^2(\mu)$ mit $\|x_n\|_2 \leq 1$, $\ell_{x_n}(x_0) \to 1$. Dann folgt

$$\|x_n - x_0\|_2^2 = \int_\Omega (x_n^2 - 2x_nx_0 + x_0^2)\,d\mu \leq 1 - 2\ell_{x_n}(x_0) + 1 \to 0.$$

Nach Satz III.5.3 ist die L^2-Norm an der Stelle x_0 Fréchet-differenzierbar mit Ableitung ℓ_{x_0}.

Wer sich mit dem abstrakten Begriff des Hilbertraums aus Kapitel V bereits vertraut gemacht hat, sollte mit allgemeinen Hilbertraummethoden beweisen, daß jede Hilbertraumnorm außer bei 0 Fréchet-differenzierbar ist; vgl. Aufgabe V.6.23.

Auch die Norm von $L^p(\mu)$ ist im Fall $1 < p < \infty$ an jeder von 0 verschiedenen Stelle Fréchet-differenzierbar, siehe Aufgabe III.6.32.

Als nächstes werden einige Sätze über differenzierbare Abbildungen zusammengestellt.

Satz III.5.4 *Seien X, Y, Z normierte Räume und $U \subset X$ sowie $V \subset Y$ offene Teilmengen.*

(a) *Sind $f, g\colon U \to Y$ Gâteaux- bzw. Fréchet-differenzierbar bei $x_0 \in U$, so sind es auch $f + g$ sowie λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ mit Ableitungen*

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0), \quad D(\lambda f)(x_0) = \lambda\, Df(x_0).$$

(b) (Mittelwertsatz)
Sei $f\colon U \to Y$ Gâteaux-differenzierbar; das „Intervall“ $I = \{x_0 + \lambda u\colon 0 \leq \lambda \leq 1\}$ liege in der offenen Menge U. Dann gilt

$$\|f(x_0+u) - f(x_0)\| \leq \sup_{\xi \in I} \|Df(\xi)\|\,\|u\|.$$

(c) *Ist $f\colon U \to Y$ Gâteaux-differenzierbar und ist $Df\colon U \to L(X,Y)$ stetig, so ist f sogar Fréchet-differenzierbar; man sagt, f sei stetig differenzierbar, und schreibt $f \in C^1(U,Y)$.*

(d) (Kettenregel)
Seien $f\colon U \to Y$ und $g\colon V \to Z$, wo $f(U) \subset V$, Fréchet-differenzierbar bei $x_0 \in U$ bzw. $f(x_0) \in V$; dann ist $g \circ f$ Fréchet-differenzierbar bei x_0 mit Ableitung

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

(e) (Satz über implizite Funktionen)
Es seien X, Y und Z vollständig und $F\colon X \oplus Y \supset U \times V \to Z$ stetig differenzierbar mit $F(x_0,y_0) = 0$. Die Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x_0,y)$ bei y_0 sei ein Isomorphismus von Y auf Z. Dann existieren Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0, so daß für jedes $x \in U_0$ die Gleichung $F(x,y) = 0$ genau eine Lösung $y =: f(x) \in V_0$ besitzt, und die so definierte Funktion $f\colon U_0 \to Y$ ist stetig differenzierbar.

Beweis. (a), (d) und (e) beweist man genauso wie im Endlichdimensionalen; im Satz über implizite Funktionen wird die Vollständigkeit benötigt, da man im Beweis den Banachschen Fixpunktsatz anwendet.

(b) Wähle mit Korollar III.1.6 ein lineares Funktional $y' \in B_{Y'}$ mit $y'\bigl(f(x_0+u) - f(x_0)\bigr) = \|f(x_0+u) - f(x_0)\|$, und wende den klassischen Mittelwertsatz auf die Hilfsfunktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = y'\bigl(f(x_0+\lambda u) - f(x_0)\bigr)$ mit der Ableitung $\varphi'(\lambda) = y'\bigl(Df(x_0+\lambda u)(u)\bigr)$ an. Das liefert sofort die gewünschte Abschätzung.

(c) Seien $x_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\|Df(x_0+y) - Df(x_0)\| \le \varepsilon$ für $\|y\| \le \delta$. Seien nun $\|u\| \le \delta$ und $y' \in B_{Y'}$ so, daß

$$y'\bigl(f(x_0+u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)\bigr) = \|f(x_0+u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)\|.$$

Wendet man den Mittelwertsatz auf die gleiche Hilfsfunktion wie unter (b) an, folgt für ein $\vartheta \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\|f(x_0+u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)\| &= y'\bigl(f(x_0+u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)\bigr)\\ &\le \|y'\|\,\|Df(x_0+\vartheta u)(u) - Df(x_0)(u)\|\\ &\le \varepsilon\|u\|.\end{aligned}$$

Lemma III.5.2 zeigt die Fréchet-Differenzierbarkeit bei x_0. □

Mit der Kettenregel läßt sich die Fréchet-Differenzierbarkeit der Norm von $L^2(\mu)$ erneut begründen: Setze

$$\begin{array}{ll} f\colon L^2(\mu) \to L^1(\mu), & x \mapsto x^2,\\ g\colon L^1(\mu) \to \mathbb{R}, & y \mapsto \int y\,d\mu,\\ h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, & z \mapsto \sqrt{z}. \end{array}$$

Ist $0 \neq x_0 \in L^2(\mu)$, so ist $\| \, . \, \|_2 = h \circ g \circ f$ bei x_0 Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} x \;\mapsto\; & \bigl[Dh\bigl(g(f(x_0))\bigr) \circ Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)\bigr]\,(x) \\ = \; & \left[\frac{1}{2\sqrt{g(f(x_0))}} \cdot g \circ M_{2x_0}\right](x) \;=\; \frac{\int x_0 x \, d\mu}{\int x_0^2 \, d\mu}; \end{aligned}$$

benutze Beispiel (b) und (d) und die dortigen Bezeichnungen.

Man kann auch höhere Ableitungen einführen. Ist $f\colon X \supset U \to Y$ Fréchet-differenzierbar, so ist Df eine Funktion von U nach $L(X,Y)$. Falls diese Fréchet-differenzierbar ist, nennt man f zweimal Fréchet-differenzierbar; die zweite Ableitung ist eine Abbildung

$$D^2 f\colon U \to L(X, L(X,Y)).$$

Dieser monströse normierte Raum läßt sich als ein Raum bilinearer Abbildungen darstellen. Ist nämlich $T \in L(X, L(X,Y))$, kann man eine Abbildung

$$\phi_T\colon X \times X \to Y, \quad \phi_T(x_1, x_2) = (Tx_1)(x_2)$$

assoziieren. Diese ist bilinear (also linear in x_1, wenn man x_2 festhält, und umgekehrt) und beschränkt in dem Sinn, daß

$$\|\phi_T\| := \sup_{x_1, x_2 \in B_X} \|\phi_T(x_1, x_2)\| < \infty$$

ist. Auf diese Weise wird der Raum $L^{(2)}(X,Y)$ der beschränkten bilinearen Abbildungen von $X \times X$ nach Y zu einem normierten Raum, der zu $L(X, L(X,Y))$ isometrisch isomorph ist; denn offensichtlich ist $\|\phi_T\| = \|T\|$, und eine gegebene beschränkte bilineare Abbildung ϕ kann durch den gemäß $(Tx_1)(x_2) = \phi(x_1, x_2)$ wohldefinierten Operator $T \in L(X, L(X,Y))$ als $\phi = \phi_T$ dargestellt werden. Mit dieser Identifikation operiert die zweite Ableitung als

$$D^2 f\colon U \to L^{(2)}(X,Y).$$

Induktiv können jetzt höhere Ableitungen als Abbildungen

$$D^n f\colon U \to L^{(n)}(X,Y) \cong L(X, L^{(n-1)}(X,Y))$$

definiert werden; $D^n f(x_0)$ ist also eine n-fach multilineare Abbildung. Damit kann man den Satz von Taylor formulieren, der wie im Endlichdimensionalen auf den reellen Fall zurückgeführt werden kann; nur die Notation ist etwas komplizierter.

Satz III.5.5 (Satz von Taylor)
Sei $f\colon X \supset U \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal Fréchet-differenzierbar; es liege $\{x_0 + \lambda v\colon 0 \le \lambda \le 1\}$ in der offenen Menge U. Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} f(x_0+v) &= f(x_0) + Df(x_0)(v) + \frac{D^2 f(x_0)}{2}(v,v) + \cdots \\ &\quad + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(v,\dots,v) + \frac{D^{n+1} f(x_0+\vartheta v)}{(n+1)!}(v,\dots,v,v). \end{aligned}$$

Das klassische Anwendungsfeld der Differentialrechnung ist das Lösen von Extremwertaufgaben. Das ist im unendlichdimensionalen Fall nicht anders; das Teilgebiet der Mathematik, das sich dem Studium von Extremalproblemen auf unendlichdimensionalen Räumen widmet, wird traditionell *Variationsrechnung* genannt. Ein fundamentales Problem, das sich im Endlichdimensionalen nicht stellt, ist das der fehlenden Kompaktheit abgeschlossener beschränkter Mengen; daher ist die Existenz einer Lösung eines unendlichdimensionalen Extremalproblems eine wesentlich heiklere Sache.

Als Beispiel betrachte das Problem, das Minimum des Funktionals

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (t\dot{x}(t))^2 \, dt$$

auf der Menge $A = \{x \in C^1[-1,1]\colon x(-1) = -1,\ x(1) = 1\}$ zu bestimmen; $\dot{x}$ bezeichnet die Ableitung dx/dt. Es ist klar, daß f durch 0 nach unten beschränkt ist, und mit Hilfe der Funktionen $x_\varepsilon(t) = \arctan(t/\varepsilon)/\arctan(1/\varepsilon)$ erkennt man $\inf_{x\in A} f(x) = 0$. Da $f(x) = 0$ nur für konstante Funktionen gilt und diese in A nicht zugelassen sind, hat das Minimumproblem keine Lösung.

Es ist jedoch leicht, eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums aufzustellen.

Satz III.5.6 *Ist $U \subset X$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar und besitzt f bei $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so gilt notwendig $Df(x_0) = 0$.*

Beweis. Sei $v \in X$. Auf einem hinreichend kleinen Intervall $(-\alpha, \alpha)$ ist die Hilfsfunktion $\varphi(h) = f(x_0 + hv)$ definiert und differenzierbar. Sie besitzt nach Voraussetzung bei $h = 0$ ein lokales Extremum, also folgt $\varphi'(0) = 0$, was $Df(x_0)(v) = 0$ impliziert. Da v beliebig war, folgt die Behauptung. □

In der klassischen Variationsrechnung studiert man die notwendige Bedingung $Df(x_0) = 0$, die in vielen Anwendungen in eine Differentialgleichung transformiert werden kann, die *Euler-Gleichung* oder *Euler-Lagrange-Gleichung* des Problems genannt wird. Dazu ein einfaches Beispiel.

Was ist die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten mit den Koordinaten $(0,0)$ und $(1,0)$ in der Ebene? Die Antwort lautet natürlich: die

Gerade. Um dieses Problem mit Hilfe von Satz III.5.6 anzugehen, definieren wir das Funktional

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt$$

auf dem Banachraum $C_0^1[0,1] = \{x \in C^1[0,1]\colon x(0) = x(1) = 0\}$; dieses Integral gibt bekanntlich die Bogenlänge der Kurve $\{(t, x(t))\colon 0 \le t \le 1\}$ an. Notwendig für eine Minimalstelle ist $Df(x_0) = 0$, das heißt hier (verwende Beispiel (c) und die Kettenregel)

$$Df(x_0)(v) = \int_0^1 \frac{\dot{x}_0(t)\dot{v}(t)}{(1 + \dot{x}_0(t)^2)^{1/2}}\, dt = 0 \qquad \forall v \in C_0^1[0,1].$$

Falls x_0 sogar zweimal stetig differenzierbar ist, kann man partiell integrieren und erhält, da die Randterme verschwinden,

$$\int_0^1 \frac{\ddot{x}_0(t)}{(1 + \dot{x}_0(t)^2)^{3/2}} v(t)\, dt = 0 \qquad \forall v \in C_0^1[0,1].$$

Nun gilt für stetige Funktionen w

$$\int_0^1 w(t)v(t)\, dt = 0 \quad \forall v \in C_0^1[0,1] \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

(Beweis?); diese obwohl einfache, doch äußerst nützliche Aussage wird *Fundamentallemma der Variationsrechnung* genannt. Hier ergibt sich als Euler-Gleichung des Variationsproblems deshalb $\ddot{x}_0 = 0$. Mit anderen Worten: Die einzigen zweimal stetig differenzierbaren Kandidaten für unser Minimalproblem sind die Geraden. In diesem speziellen Beispiel ist die notwendige Bedingung auch hinreichend. Über allgemeine hinreichende Bedingungen für Extrema kann man z.B. in den Monographien von Troutman [1996], Buttazzo/Giaquinta/Hildebrandt [1998] und Jost/Li-Jost [1999] nachlesen; vgl. jedoch Aufgabe III.6.35.

Für Extremalprobleme, die mit mehrdimensionalen Integralen zusammenhängen, führt der Weg über die Euler-Gleichung auf partielle Differentialgleichungen. Insbesondere hier ist ein anderer Zugang, die sog. *direkte Methode der Variationsrechnung*, nützlich. Die Idee, eine Minimalstelle für ein Funktional f zu finden, ist einfach: Wähle eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to \inf f$. Unter geeigneten Voraussetzungen existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), die in einem adäquaten Sinn gegen einen Punkt x_0 konvergiert. Wenn auch $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, hat man die Existenz einer Minimalstelle bewiesen.

Um die Funktionale, für die dieses Programm funktioniert, zu beschreiben, führen wir einige Begriffe ein.

Definition III.5.7 Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf einem normierten Raum X.

(a) f heißt [*schwach*] *halbstetig von unten*, falls stets

$$x_n \to x \text{ [schwach]}, \ f(x_n) \le c \quad \Rightarrow \quad f(x) \le c.$$

(b) f heißt *koerzitiv*, falls

$$\|x_n\| \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to \infty.$$

(c) f heißt *konvex*, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in X, \ 0 \le \lambda \le 1.$$

Die so definierte Halbstetigkeit müßte eigentlich „Folgenhalbstetigkeit“ genannt werden; im Fall der Normkonvergenz ist sie zur topologischen Definition aus Lemma B.2.5 äquivalent.

Manchmal ist es sinnvoll, diese Definitionen auf Funktionale mit Werten in $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ auszudehnen; die folgenden Resultate gelten dann entsprechend.

Satz III.5.8 *Sei X ein reflexiver Banachraum, und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ schwach halbstetig von unten und koerzitiv. Dann existiert eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$.*

Beweis. Sei $m = \inf_{x\in X} f(x)$, der Fall $m = -\infty$ ist an dieser Stelle (noch) nicht ausgeschlossen. Wähle eine Folge (x_n) in X mit $f(x_n) \to m$. Da f koerzitiv ist, ist (x_n) beschränkt, und da X reflexiv ist, besitzt (x_n) nach Theorem III.3.7 eine schwach konvergente Teilfolge, etwa $x_{n_k} \to x_0$ schwach.

Wir zeigen jetzt $f(x_0) = m$ $(> -\infty)$. Sei $c > m$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_{n_k}) \le c$ für $k \ge k_0$. Da f schwach halbstetig von unten ist, folgt auch $f(x_0) \le c$. Weil $c > m$ beliebig war, muß $m \le f(x_0) \le m$ sein. □

Das nächste Lemma liefert ein hinreichendes Kriterium für die schwache Halbstetigkeit von unten.

Lemma III.5.9 *Ist X ein normierter Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvex und stetig oder bloß halbstetig von unten, so ist f schwach halbstetig von unten.*

Beweis. Die Voraussetzung impliziert, daß für jedes c die Menge $\{x\colon f(x) \le c\}$ konvex und abgeschlossen ist. Die Behauptung folgt dann sofort aus Satz III.3.8. □

Beispiel. Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Es mögen $a \in L^1(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ und $p > 1$ mit $F(t,u) \ge a(t) + b|u|^p$ existieren. Dann definiert

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(t, x(t))\, dt$$

ein Funktional auf $L^p(\mathbb{R})$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, da

$$f(x) \geq \int_{\mathbb{R}} a(t)\, dt + b\|x\|_p^p;$$

diese Abschätzung zeigt auch die Koerzitivität von f. Für alle t sei $u \mapsto F(t,u)$ eine konvexe Funktion; dann ist auch f ein konvexes Funktional, wie man durch Einsetzen unmittelbar erkennt. Zeigen wir noch die Halbstetigkeit von f: Sei (x_n) eine Folge in $L^p(\mathbb{R})$ mit $x_n \to x$ in $L^p(\mathbb{R})$ und $f(x_n) \leq c$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, daß (x_n) auch fast überall gegen x konvergiert[1]. Wegen der Stetigkeit von F folgt $F(t, x_n(t)) \to F(t, x(t))$ fast überall und weiter nach dem Lemma von Fatou[2] $f(x) \leq \liminf f(x_n) \leq c$. Nach Lemma III.5.9 und Satz III.5.8 besitzt f eine Minimalstelle in $L^p(\mathbb{R})$.

III.6 Aufgaben

Aufgabe III.6.26 Sei k: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Untersuche das Funktional f: $L^p[0,1] \to L^p[0,1]$, $(f(x))(s) = \int_0^1 k(s,t) \sin(x(t))\, dt$, auf Differenzierbarkeit.

Aufgabe III.6.27 Sei $U = \{x \in C[0,1]: x(t) \neq 0\ \forall t\}$. Untersuche die Abbildung f: $U \to C[0,1]$, $f(x) = 1/x$, auf Differenzierbarkeit.

Aufgabe III.6.28 An welchen Stellen ist die Supremumsnorm auf $C[0,1]$ bzw. c_0 Gâteaux- oder Fréchet-differenzierbar?

Aufgabe III.6.29 Seien f, g: $U \to Y$ Gâteaux-differenzierbar und ϕ: $Y \times Y \to Z$ bilinear und beschränkt. Bestimme die Ableitung von $x \mapsto \phi(f(x), g(x))$.

Aufgabe III.6.30 Finde Beispiele für

(a) eine Abbildung f: $X \to Y$, die an einer Stelle Gâteaux-differenzierbar, aber nicht stetig ist;

(b) eine Abbildung f: $X \to Y$, die an einer Stelle x_0 Gâteaux-differenzierbar ist, und eine Abbildung g: $Y \to Z$, die bei $f(x_0)$ Gâteaux-differenzierbar ist, so daß $g \circ f$: $X \to Z$ bei x_0 nicht Gâteaux-differenzierbar ist;

(c) eine Funktion f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die an einer Stelle sämtliche Richtungsableitungen existieren, die dort aber nicht Gâteaux-differenzierbar ist.

Aufgabe III.6.31 Eine Norm heißt *lokal gleichmäßig konvex*, wenn es zu jedem x mit $\|x\| = 1$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ gibt, so daß

$$\|y\| \leq 1, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

[1] Siehe z.B. Theorem 3.12 in Rudin [1986].
[2] Siehe z.B. Lemma 1.28 in Rudin [1986].

(a) Ist die Norm von X' lokal gleichmäßig konvex, so ist die Norm von X an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Fréchet-differenzierbar.
(b) Ist die Norm von X' strikt konvex (siehe Aufgabe I.4.13), so ist die Norm von X an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Gâteaux-differenzierbar.
(c) Ist die Norm von X' an jeder Stelle $x'_0 \neq 0$ Gâteaux-differenzierbar, so ist die Norm von X strikt konvex. [Bemerkung: Die entsprechende Umkehrung von (a) gilt nicht.]

Aufgabe III.6.32 Zeige, daß die kanonische Norm von $L^p(\mu)$ an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Fréchet-differenzierbar ist,
(a) mit Hilfe von Beispiel III.5(e),
(b) im Fall $p \geq 2$ mittels der Aufgaben III.6.31 und I.4.18.

Aufgabe III.6.33 Wenn die Norm eines normierten Raums X auf $X \setminus \{0\}$ Fréchet-differenzierbar ist, ist die Ableitung dort stetig.

Aufgabe III.6.34 Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein Funktional auf einem normierten Raum. Der *Epigraph* von f ist die Teilmenge $\operatorname{epi}(f) := \{(x,t)\colon f(x) \leq t\}$ von $X \oplus \mathbb{R}$.
(a) f ist genau dann konvex, wenn $\operatorname{epi}(f)$ konvex ist.
(b) f ist genau dann halbstetig von unten, wenn $\operatorname{epi}(f)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe III.6.35 Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein Gâteaux-differenzierbares konvexes Funktional und $x_0 \in X$ mit $Df(x_0) = 0$. Dann besitzt f bei x_0 ein globales Minimum.

Aufgabe III.6.36 Bestimme das Minimum des Funktionals $f(x) = \int_0^1 \bigl(x(t)^4 + e^t x(t)\bigr)\,dt$ auf $C[0,1]$.

III.7 Bemerkungen und Ausblicke

[...]
Der in Abschnitt III.5 präsentierte Zugang zur Differentiation in normierten Räumen ist vom heutigen Standpunkt aus sehr natürlich; vor ca. 100 Jahren war diese Sichtweise freilich revolutionär. Volterra schlug 1887 zum ersten Mal die Idee vor, z.B. die Bogenlänge als Funktion der Kurve aufzufassen, er sprach in diesem Zusammenhang von „Funktionen, die von anderen Funktionen abhängen“; der Begriff des Funktionals taucht erst 1903 bei Hadamard auf. Die abstrakte Differentialrechnung wurde um 1910 von Fréchet vorgestellt und in zwei postum veröffentlichten fundamentalen Arbeiten (1919, 1922) von Gâteaux, der im I. Weltkrieg getötet wurde, weiterentwickelt. Daß die „elementaren“ Resultate über differenzierbare Funktionen nichts weiter als ein Abziehbild der Beweise aus der Analysisvorlesung sind, liegt natürlich daran, daß wir heute den „richtigen“ Begriff der Differenzierbarkeit für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ besitzen. Aber die Idee der linearen Approximation als Definition der Differenzierbarkeit, selbst für Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, verdankt man ebenfalls erst Fréchet (1911)

sowie unabhängig von ihm Young (1909), und von dort zur Differentialrechnung in normierten Räumen ist es nur ein vergleichsweise kleiner Schritt. Zum Satz über implizite Funktionen ist noch anzumerken, daß der Version im Text „harte“ Sätze über implizite Funktionen gegenüberstehen, die auf raffinierteren Abschätzungen beruhen und viel schwächere Voraussetzungen haben; siehe etwa Schwartz [1969]. Detaillierte historische Kommentare finden sich in Nasheds Übersichtsartikel „Differentiability and related properties of nonlinear operators“, in L. B. Rall, *Nonlinear Functional Analysis and Applications* (Academic Press 1971), S. 103–309.

Die geometrische Charakterisierung der Fréchet-Differenzierbarkeit der Norm in Satz III.5.3 stammt von Šmulyan (1940), der außerdem unter Zusatzvoraussetzungen bewies, daß ein Banachraum, dessen Dualraumnorm Fréchet-differenzierbar ist[3], notwendig reflexiv sein muß. Tatsächlich gilt diese Aussage ohne weitere Zusatzvoraussetzungen, wie in den fünfziger Jahren gezeigt werden konnte. Umgekehrt zeigte Troyanski (*Studia Math.* 37 (1971) 173–180), daß jeder reflexive Banachraum eine äquivalente Fréchet-differenzierbare Norm besitzt, und M. Kadets (*Uspekhi Mat. Nauk* 20.3 (1965) 183–187) und Klee (*Fund. Math.* 49 (1960) 25–34) erhielten unabhängig voneinander das Resultat, daß ein separabler Banachraum genau dann eine äquivalente Fréchet-differenzierbare Norm besitzt, wenn sein Dualraum separabel ist. Da jeder separable Banachraum eine äquivalente Gâteaux-differenzierbare Norm besitzt (Day 1955), ist die Existenz einer Fréchet-differenzierbaren Norm eine erhebliche Einschränkung, die jedoch weitreichende Konsequenzen hat. So gilt etwa:

- *Besitzt ein Banachraum X eine äquivalente Fréchet-differenzierbare Norm, so ist jedes stetige konvexe Funktional auf X auf einer dichten Teilmenge Fréchet-differenzierbar.*

Dieses Resultat geht im wesentlichen auf Asplunds bahnbrechende Arbeit in *Acta Math.* 121 (1968) 31–47 zurück. Banachräume, in denen die Aussage dieses Satzes gilt, werden heute *Asplundräume* genannt; sie können auf vielfältige Art charakterisiert werden. Z.B. ist X genau dann ein Asplundraum, wenn jeder separable Unterraum einen separablen Dualraum hat. Ersetzt man im Satz von Asplund „Fréchet“ durch „Gâteaux“, erhält man ebenfalls eine wahre Aussage – dies ist ein tiefliegender Satz von Preiss (*Israel J. Math.* 72 (1990) 257–279), der eine jahrzehntealte Frage beantwortet. (Daß auf separablen Banachräumen stetige konvexe Funktionale auf einer dichten Teilmenge Gâteaux-differenzierbar sind, wurde schon 1933 von Mazur gezeigt.)

Ein weiteres gefeiertes Resultat von Preiss bezieht sich auf Lipschitz-stetige Funktionen. Nach einem Satz von Rademacher ist jede Lipschitz-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall bzgl. des Lebesguemaßes und

[3] Hier wie im folgenden ist „an jeder Stelle $\neq 0$ Fréchet-differenzierbar“ gemeint.

insbesondere auf einer dichten Teilmenge differenzierbar. Es war lange Zeit ein offenes Problem, ob eine analoge Aussage auf unendlichdimensionalen Räumen Bestand hat. In der Literatur waren verschiedene Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionalen $f\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$ angegeben worden, die angeblich nirgends Fréchet-differenzierbar waren; leider waren all diese Beispiele inkorrekt. So blieb das Problem offen, bis Preiss zeigen konnte (*J. Funct. Anal.* 91 (1990) 312–345):

- *Ist X ein Asplundraum (z.B. reflexiv), so ist jedes Lipschitz-stetige Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einer dichten Teilmenge Fréchet-differenzierbar.*

Detaillierte Informationen zu diesem Themenkreis findet man bei Deville/Godefroy/Zizler [1993], Habala/Hájek/Zizler [1996] und Phelps [1993].

Das vor Satz III.5.6 beschriebene Beispiel eines Minimumproblems ohne Lösung wurde 1870 von Weierstraß zur Kritik des *Dirichletschen Prinzips* konstruiert. Das ist die von Riemann benutzte Methode, das Dirichletproblem ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet)

$$-\Delta u = h \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{III.13}$$

zu lösen, indem man das (nach unten beschränkte) Dirichletintegral $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\operatorname{grad} u\|^2\,dx - \int_\Omega u(x)h(x)\,dx$ unter allen C^2-Funktionen, die die Randbedingung erfüllen, minimiert. Riemann war ohne weitere Begründung von der Existenz des Minimums ausgegangen; seine Schlußweise war nun durch Weierstraß' Beispiel ins Wanken geraten. Das Dirichletsche Prinzip wurde erst nach 1900 von Hilbert in zwei Arbeiten (*Math. Ann.* 59 (1904), 161–186, *J. Reine Angew. Math.* 129 (1905) 63–67) rehabilitiert, in denen er die direkte Methode der Variationsrechnung entwickelt; er schreibt (a.a.O., S. 65):

> Eine jede reguläre Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.

Die moderne Fassung des Dirichletschen Prinzips fußt auf der Theorie der Hilbert- und insbesondere der Sobolevräume; siehe Kapitel V und speziell Aufgabe V.6.14. Damit werden in (III.13) die „einschränkenden Annahmen hinsichtlich der Grenzbedingungen“ durch die Zugehörigkeit von u zu einem Sobolevraum formuliert, und der „erweiterte Lösungsbegriff“ ist der der schwachen Lösung, vgl. S. 3f. Zum Umfeld des Dirichletschen Prinzips ist Monna [1975] lesenswert.