Ergänzungen:

Kapitel I:

Aufgabe I.4.28 Sei $x_n(t) = t^n$, $n \geq 1$. Gehören die konstanten Funktionen zur abgeschlossenen linearen Hülle von $x_1, x_2, \dots$ in $L^p[0,1]$?

Kapitel II:

Aufgabe II.5.14 Seien $g_1, g_2, \dots$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Zeige, daß für $1 \leq p < \infty$ und eine geeignete Konstante c_p der durch $(a_n) \mapsto c_p \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ definierte Operator J: $\ell^2 \to L^p(\mathbb{P})$ wohldefiniert und isometrisch ist.
[Hinweis: Diese Aufgabe setzt Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie voraus; nutze aus, daß die Verteilung des Zufallsvektors $(g_1, \dots, g_n)$ rotationsinvariant ist. Übrigens sind $L^p(\mathbb{P})$, $L^p[0,1]$ und $L^p(\mathbb{R}^d)$ isometrisch isomorph (siehe etwa Guerre-Delabrière [1992], S. 134), so daß jeder dieser L^p-Räume einen zu ℓ^2 isometrischen abgeschlossenen Unterraum enthält.]

Zur Neumannschen Reihe (S. 88): [...] Eine allgemeinere Variante der Neumannschen Reihe zeigt, daß $\mathrm{Id} - T$ nicht nur für einen Banachraumoperator T mit $\|T\| < 1$ ein Isomorphismus ist, sondern auch, wenn bloß ein $\lambda < 1$ mit $\|Tx\| \leq \lambda(\|x\| + \|x - Tx\|)$ für alle x existiert (Hilding, *Ann. Math.* 49 (1948) 953–955; dazu siehe auch Casazza/Kalton, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999) 519–527).

Kapitel IV:

Aufgabe IV.7.23 Sei X ein separabler Banachraum. Konstruiere eine Quotientenabbildung von ℓ^1 auf X. Konstruiere anschließend eine Quotientenabbildung von $L^1(\mathbb{R})$ auf X.
(Tip: Imitiere den 2. Teil des Beweises des Satzes von der offenen Abbildung.)

Aufgabe IV.7.25 Zeige, daß $C[0,1]$ einen zu c_0 isometrischen komplementierten Unterraum und $L^p[0,1]$ einen zu ℓ^p isometrischen komplementierten Unterraum besitzt.

Aufgabe IV.7.26 (Strikt singuläre Operatoren)
Ein stetiger linearer Operator T: $X \to Y$ zwischen Banachräumen heißt *strikt singulär*, wenn $\inf\{\|Tx\|: x \in U, \|x\| = 1\} = 0$ auf jedem unendlichdimensionalen Unterraum $U \subset X$ gilt.

(a) T ist genau dann strikt singulär, wenn die einzigen abgeschlossenen Unterräume $U \subset X$, für die die Restriktion $T|_U$: $U \to T(U)$ ein Isomorphismus ist, endlichdimensional sind.

(b) Ein kompakter Operator ist strikt singulär.

(c) Der identische Inklusionsoperator von ℓ^2 nach c_0 ist strikt singulär, aber nicht kompakt.

(d) Ein Operator ist strikt singulär, wenn zu jedem unendlichdimensionalen abgeschlossenen Unterraum $U \subset X$ ein weiterer unendlichdimensionaler abgeschlossener Unterraum $V \subset U$ existiert, so daß $T|_V$ kompakt ist. [Es gilt auch die Umkehrung; vgl. Pietsch [1980], Theorem 1.9.3.]

`Kapitel V:`

(S. 183ff.:) Als *Anwendung* wird jetzt gezeigt, wie Hilbertraummethoden bei der Lösung partieller Differentialgleichungen verwandt werden können; dabei treten die Sobolevräume aus Definition V.1.11 auf. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachte folgendes Randwertproblem:

- Finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{V.24}$$

Durch partielle Integration folgt für eine Lösung u der Differentialgleichung aus

$$-\sum_{i=1}^{n} \langle D_i^2 u, \varphi\rangle_{L^2} = \langle f, \varphi\rangle_{L^2} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \langle D_i u, D_i \varphi\rangle_{L^2} = \langle f, \varphi\rangle_{L^2} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Zur Abkürzung führen wir nun auf $H_0^1(\Omega)$ die Sesquilinearform

$$[u, v] := \sum_{i=1}^{n} \langle D_i u, D_i v\rangle_{L^2}$$

(mit D_i = schwache Ableitung) ein, und statt des ursprünglichen Randwertproblems betrachte folgende Abschwächung:

- Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$[u, \varphi] = \langle f, \varphi\rangle_{L^2} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{V.25}$$

Die Randbedingung „$u|_{\partial\Omega} = 0$“ wird hierbei durch die Forderung $u \in H_0^1(\Omega)$ ($= \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ bzgl. $\|\,.\,\|_{W^1}$) ausgedrückt.

Das Problem (V.25) hat eine Lösung nach dem Satz von Fréchet-Riesz. Um das zu zeigen, beachte zunächst, daß für $f \in L^2(\Omega)$ wegen

$$|\langle f, \varphi\rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{W^1}$$

das lineare Funktional $\varphi \mapsto \langle \varphi, f\rangle$ stetig auf $(\mathscr{D}(\Omega), \| \,.\, \|_{W^1})$ ist und daher eine Fortsetzung auf den Abschluß $H_0^1(\Omega)$ zuläßt. Um den Zusammenhang von $[\,.\,,\,.\,]$ mit dem Sobolev-Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{W^1}$ zu klären, benötigen wir die wichtige *Ungleichung von Poincaré-Friedrichs*:

- *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, etwa $\Omega \subset (-s,s)^n$, so gilt*

$$\|u\|_{L^2} \leq 2s[u,u]^{1/2} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis hierfür. Da die rechte und die linke Seite der Ungleichung stetig bzgl. der $\| \,.\, \|_{W^1}$-Norm von u abhängen, reicht es, diese für $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ zu zeigen. Indem man solch ein u außerhalb von Ω durch 0 fortsetzt, erhält man eine ebenfalls u genannte Funktion in $\mathscr{D}\big((-s,s)^n\big)$, und es gilt für $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-s,s)^n$

$$u(x) = \int_{-s}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\, dt = \int_{-s}^{s} \mathbf{1}_{(-s,x_1]}(t) \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\, dt.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$|u(x)|^2 \leq \int_{-s}^{s} \big(\mathbf{1}_{(-s,x_1]}(t)\big)^2\, dt \int_{-s}^{s} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\right|^2\, dt,$$

und da das erste Integral durch $2s$ abgeschätzt werden kann, folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^2\, dx &= \int_{-s}^{s} dx_1 \dots \int_{-s}^{s} dx_n\, |u(x)|^2 \\
&\leq 2s \int_{-s}^{s} dx_1 \dots \int_{-s}^{s} dx_n \int_{-s}^{s} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\right|^2\, dt \\
&= (2s)^2 \int_{-s}^{s} dx_2 \dots \int_{-s}^{s} dx_n \int_{-s}^{s} dt\, \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n)\right|^2 \\
&= 4s^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2\, dx \;\leq\; 4s^2[u,u].
\end{aligned}$$

Eine Konsequenz dieser Ungleichung ist, daß auf $H_0^1(\Omega)$ die Sesquilinearform $[\,.\,,.\,]$ ein Skalarprodukt ist, dessen abgeleitete Norm $|||u||| = [u,u]^{1/2}$ zur W^1-Norm äquivalent ist, denn

$$|||u||| \leq \|u\|_{W^1} \leq (4s^2+1)^{1/2}|||u||| \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Nach dem Satz von Fréchet-Riesz läßt sich das stetige Funktional $\varphi \mapsto \langle f, \varphi\rangle_{L^2}$ auf dem Hilbertraum $(H_0^1(\Omega), [\,.\,,\,.\,])$ gemäß (V.25) durch ein eindeutig bestimmtes $u \in H_0^1(\Omega)$ darstellen. Zusammengefaßt ergibt sich:

- *Für alle* $f \in L^2(\Omega)$ *existiert genau eine „schwache Lösung“* $u \in H_0^1$ *des Randwertproblems* (V.24)*, d.h. des Problems* (V.25)*.*

Man kann zeigen, daß für $f \in C^\infty(\Omega)$ auch $u \in C^\infty(\Omega)$ ist (*Weylsches Lemma*); dazu kann man das Lemma von Sobolev (Satz V.2.12) verwenden.

Aufgabe V.6.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt [diese Voraussetzung wird nur der Einfachheit halber gemacht] und f eine reellwertige Funktion in $H_0^1(\Omega)$.

(a) Ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit beschränkter Ableitung, $h(0) = 0$ und $\sup |h(t)/t| < \infty$, so ist $h \circ f \in H_0^1(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen $D^j(h \circ f) = (h' \circ f) \cdot D^j f$.
(Hinweis: Es ist hilfreich zu wissen, daß jede L^2-konvergente Folge eine fast überall konvergente Teilfolge zuläßt.)

(b) Es ist $|f| \in H_0^1(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen $D^j(|f|) = (\mathbf{1}_{\{f>0\}} - \mathbf{1}_{\{f<0\}}) \cdot D^j f$. Ferner gilt $\| \, |f| \, \|_{W^1} = \|f\|_{W^1}$.
(Tip: Approximiere die Betragsfunktion durch Funktionen h wie in (a).)

[Ein Banachraum X von Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f \in X \Rightarrow |f| \in X$ & $\| \, |f| \, \| = \|f\|$ heißt ein *Banachverband*. Auch $W^1(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$ sind Banachverbände.]

Aufgabe V.6.14 Es sei H ein reeller Hilbertraum, $\ell \in H'$ und $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, beschränkte und koerzitive Bilinearform; es gelte also für geeignete Konstanten $M, m > 0$ und alle $x, y \in H$

$$|B(x,y)| \le M\|x\| \, \|y\|, \quad B(x,x) \ge m\|x\|^2.$$

Setze $J\colon H \to \mathbb{R}$, $J(x) = B(x,x) - 2\ell(x)$.

(a) J ist stetig und nach unten beschränkt.

(b) Für ein $u \in H$ gilt die Äquivalenz

$$J(u) \le J(x) \ \forall x \in H \ \Leftrightarrow \ B(u,x) = \ell(x) \ \forall x \in H.$$

(c) J nimmt sein Minimum an genau einer Stelle an.

[Dies ist die abstrakte Fassung des *Dirichletschen Prinzips*, mit dessen Hilfe elliptische partielle Differentialgleichungen gelöst werden können; siehe etwa Jost [1998].]

Aufgabe V.6.23 Die Norm eines Hilbertraums ist an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Fréchet-differenzierbar.
(Tip: Verwende Satz III.5.3.)