Dirk Werner

# Funktionalanalysis

Änderungen in der zweiten Auflage

## Neue und modifizierte Aufgaben:

**Aufgabe I.4.∗∗** Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-t)^n/n$ in der Norm von $C[0,1]$?

**Aufgabe I.4.∗∗** Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $(n^s) \in \ell^p$ bzw. $\bigl(n^s(\log(n+1))^t\bigr) \in \ell^p$?

**Aufgabe I.4.12**

(a) Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ und $1 \le p \le q < \infty$. Dann ist $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$; genauer gilt für $f \in L^q[a,b]$

$$\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{1/p}} \le \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{1/q}}.$$

(Tip: Höldersche Ungleichung!)

(b) Sei $I$ ein unbeschränktes Intervall. Für $1 \le p \ne q < \infty$ gilt weder $L^p(I) \subset L^q(I)$ noch $L^q(I) \subset L^p(I)$.

**Aufgabe I.4.13** (Lyapunovsche Ungleichung)
Seien $1 \le p_0$, $p_1 < \infty$ und $0 < \theta < 1$, und sei $p$ durch $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ definiert. Dann ist $L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, genauer gilt

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta} \qquad \forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}).$$

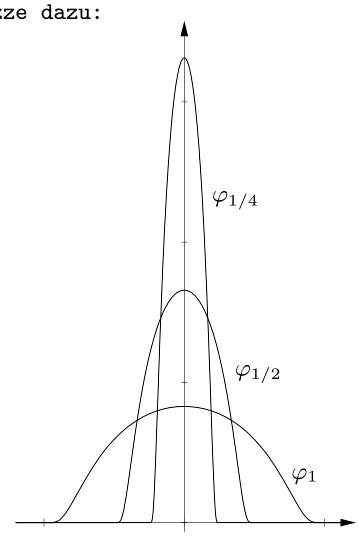
(Tip: Höldersche Ungleichung!)

**Aufgabe I.4.∗∗** Betrachte die durch $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, $y_n(t) = n(t^n - t^{n+1})$ und $z_n(t) = n^{3/2}(t^n - t^{n+1})$ auf $[0,1]$ definierten Funktionen. Prüfe die Folgen $(x_n)$, $(y_n)$ und $(z_n)$ auf Beschränktheit und Konvergenz in $C[0,1]$ sowie in $L^p[0,1]$.
(Tip für $(z_n)$: Behandle zunächst die Fälle $p = 1$ und $p = 2$ und benutze Aufgabe I.4.13.)

**Aufgabe II.5.∗∗** (Satz von Mazur-Ulam)
Sei $X$ ein normierter Raum und $\Phi$: $X \to X$ eine Funktion mit $\Phi(0) = 0$ und $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| = \|x-y\|$ für alle $x, y \in X$. Dann ist $\Phi$ linear. Beweise diese Aussage unter der Zusatzvoraussetzung, daß $X$ strikt konvex ist (vgl. Aufgabe I.4.11); dazu zeige zuerst, daß in diesem Fall $z = \frac{1}{2}(x+y)$ der einzige Punkt mit $\|z-x\| = \|z-y\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$ ist. [Der Beweis des Satzes von Mazur-Ulam im allgemeinen Fall ist schwieriger und bei Banach [1932], S. 166, zu finden.]

**Aufgabe II.5.**∗∗ Betrachte die normierte Summe $Z = X \oplus_p Y$ zweier normierter Räume $X$ und $Y$, wo $1 \le p \le \infty$. Beschreibe den Dualraum von $Z$ mit Hilfe der Dualräume von $X$ und $Y$.

**Aufgabe II.5.6** `Skizze dazu:`




**Aufgabe III.5.3** Sei $X$ ein normierter Raum und $K \subset X$ konvex.

(a) Die Mengen $\overline{K}$ und $\operatorname{int} K$ sind ebenfalls konvex.

(b) Ist $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, so gilt $\overline{K} = \overline{\operatorname{int} K}$.

**Aufgabe III.5.4** Seien $K$ und $L$ konvexe absorbierende Teilmengen des normierten Raums $X$, und seien $p_K$ und $p_L$ die zugehörigen Minkowski-Funktionale.

(a) Zeige $p_K \ge p_L$, falls $K \subset L$.

(b) $p_K$ ist genau dann stetig, wenn $0 \in \operatorname{int} K$ gilt.

(c) Wenn $p_K$ stetig ist, gelten $\overline{K} = p_K^{-1}([0,1])$ und $\operatorname{int} K = p_K^{-1}([0,1))$.

(d) Gilt zusätzlich $\lambda K \subset K$, falls $|\lambda| \le 1$ (d.h. ist $K$ „kreisförmig“), so ist $p_K$ eine Halbnorm, und $p_K$ ist eine Norm dann und nur dann, wenn $K$ keinen nichttrivialen Unterraum von $X$ enthält.

(e) Gilt für eine konvexe Menge $K$ „$K$ absorbierend $\Rightarrow 0 \in \operatorname{int} K$“?

**Aufgabe III.5.**∗∗ Seien $V_1$ und $V_2$ konvexe Teilmengen des normierten Raums $X$, und es gelte $\operatorname{int} V_1 \neq \emptyset$, $\operatorname{int} V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert $x' \in X'$, $x' \neq 0$, mit

$$\operatorname{Re} x'(v_1) \le \operatorname{Re} x'(v_2) \qquad \forall v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

**Aufgabe III.5.10** Sei $K$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* (bzw. *affin* bzw. *konkav*), wenn $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für alle $x, y \in K$, $0 \le \lambda \le 1$ (bzw. $=$ bzw. $\ge$). Sei nun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konkave stetige Funktion sowie $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe stetige Funktion mit $f \le g$. Dann existiert eine affine stetige Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \le h \le g$.
(Hinweis: Betrachte die Teilmengen $\{(x,r)\colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ r < f(x)\}$ und $\{(x,r)\colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ r > g(x)\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$.)

**Aufgabe IV.7.∗∗** (Das Choquet-Spiel)
Sei $T$ ein topologischer Raum, der, um unliebsame Überraschungen zu vermeiden, hier wie im folgenden stillschweigend als nicht leer angenommen wird. Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel: Abwechselnd wird eine nichtleere offene Menge gewählt, die in der soeben vom Kontrahenten gewählten Menge liegen muß; den ersten Zug macht A und hat dabei die freie Wahl. Bei einem Spieldurchgang entsteht so eine absteigende Folge offener nichtleerer Teilmengen von $T$: $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ . Falls $\bigcap V_n \neq \emptyset$, gewinnt B, andernfalls A. Wir sagen, daß B eine Gewinnstrategie hat, wenn eine Abbildung $\Phi\colon \tau \to \tau$ auf der Familie $\tau$ aller nichtleeren offenen Mengen existiert, so daß stets $\Phi(V) \subset V$ gilt und für jede Folge $V_1, V_3, V_5, \ldots \in \tau$ mit $V_1 \supset V_2 = \Phi(V_1) \supset V_3 \supset V_4 = \Phi(V_3) \supset \dots$ der Schnitt $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ nicht leer ist.

(a) Ist $T$ ein vollständiger metrischer Raum, so hat B eine Gewinnstrategie.
(b) Auch in lokalkompakten Räumen hat B eine Gewinnstrategie.
(c) Ist $T$ ein topologischer Raum, in dem B eine Gewinnstrategie hat, so gilt in $T$ der Satz von Baire.

**Aufgabe IV.7.∗∗**

(a) Sei $X$ ein Banachraum mit einer Schauderbasis $(b_n)$ und Koeffizientenfunktionalen $(b_n^*)$ (vgl. Aufgabe IV.7.17). Betrachte die Operatoren $P_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k^*(x) b_k$. Dann gelten:
  (1) $P_n \in L(X)$ und $\dim \operatorname{ran} P_n = n$ für alle $n$,
  (2) $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{m,n\}}$ für alle $m$ und $n$ (insbesondere sind die $P_n$ Projektionen),
  (3) $P_n(x) \to x$ für alle $x \in X$.
(b) Ist umgekehrt $(P_n)$ eine Folge von Projektionen mit den Eigenschaften (1)–(3), so existiert eine Schauderbasis, zu der die $P_n$ wie unter (a) assoziiert sind.
(c) Sei $(t_n)$ die Folge $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \ldots$ in $[0,1]$. Definiere Projektionen $P_n$: $C[0,1] \to C[0,1]$ wie folgt: $(P_1 f)(t) = f(0)$ für alle $t$, und für $n \geq 2$ sei $P_n f$ die stückweise lineare stetige Funktion mit Knoten bei $t_j$, für die $(P_n f)(t_j) = f(t_j)$ gilt $(j = 1, \ldots, n)$. Zeige, daß die $P_n$ die Bedingungen (1)–(3) erfüllen, und skizziere die ersten Funktionen einer so erzeugten Schauderbasis von $C[0,1]$. (Hierbei handelt es sich um „die“ Schauderbasis, die von Schauder selbst konstruiert wurde.)
(d) Hingegen bilden die Funktionen $\mathbf{t}_n\colon t \mapsto t^n$, $n \geq 0$, *keine* Schauderbasis von $C[0,1]$.
(Tip: Ist $\sum_{k=0}^n a_k \mathbf{t}_k \mapsto a_1$ stetig?)

**Aufgabe IV.7.∗∗** (Lemma von Zabrejko)
Sei $p$ eine Halbnorm auf einem Banachraum $X$ mit

$$p\Bigl(\sum_{k=1}^\infty x_k\Bigr) \leq \sum_{k=1}^\infty p(x_k) \ (\leq \infty)$$

für alle konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^\infty x_k$. Dann existiert $M \geq 0$ mit

$$p(x) \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

(a) Beweise dieses Lemma.
(Tip: Betrachte $\overline{\{x\colon p(x) \le n\}}$ und imitiere den Beweis des Satzes von der offenen Abbildung.)
(b) Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zabrejko den Satz von Banach-Steinhaus.
(Tip: $p(x) = \sup_i \|T_i x\|$.)
(c) Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zabrejko den Satz vom inversen Operator (Korollar IV.3.4).
(Tip: $p(y) = \|T^{-1}y\|$.)
(d) Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zabrejko den Satz vom abgeschlossenen Graphen.
(Tip: $p(x) = \|Tx\|$.)

**Aufgabe V.6.**∗∗ Zu $\varphi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{(1/2,1]}$ setze $\varphi_{j,k}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Die *Haarschen Funktionen* $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sind wie folgt definiert: Für $n = 2^k + j \ge 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, 2^k$) setze $h_n(t) = \varphi_{j,k}(t)$ auf $[0,1)$ und ergänze diese Funktionen stetig bei $t = 1$; ferner sei $h_1(t) = 1$ auf $[0,1]$. (Skizze!)
(a) $\{h_1, h_2, \ldots\}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2[0,1]$, und $\{\varphi_{j,k}\colon j,k \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.
(b) $f \mapsto \sum_{n=1}^{2^m} \langle f, h_n\rangle h_n$ ist die Orthogonalprojektion auf den Unterraum der auf den Intervallen $[r2^{-m}, (r+1)2^{-m})$ konstanten Funktionen in $L^2[0,1]$.
(c) Für $f \in C[0,1]$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, h_n\rangle h_n$ gleichmäßig gegen $f$.
(d) Die $h_n$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2[0,1]$.
(e) Die $\varphi_{j,k}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$.

**Aufgabe V.6.**∗∗ Betrachte die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \log(1+t)$.
(a) Die Taylorreihe von $f$ um $t_0 = 0$ konvergiert gegen $f$ in der Norm von $C[0,1]$.
(b) Jede in $C[0,1]$ konvergente Umordnung der Taylorreihe konvergiert ebenfalls gegen $f$.
(c) Die Taylorreihe ist in $C[0,1]$ nicht unbedingt konvergent.
(d) Gelten die Aussagen (a)–(c) auch in $L^2[0,1]$?

**Aufgabe V.6.**∗∗ Sei $f_{j,k}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $(j2^{-k}, (j+1)2^{-k})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, und sei $g_{j,k} = -f_{j,k}$.
(a) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = f_{0,0} + g_{0,0} + f_{0,1} + g_{0,1} + f_{1,1} + g_{1,1} + f_{0,2} + \cdots$$

konvergiert in $L^2[0,1]$ gegen 0.
(b) Die Umordnung

$$f_{0,0} + f_{0,1} + f_{1,1} + g_{0,0} + f_{0,2} + f_{1,2} + g_{0,1} + f_{2,2} + f_{3,2} + g_{1,1} + \cdots$$

konvergiert gegen die konstante Funktion $\mathbf{1}$.

(c) Die Menge $\{x \in L^2[0,1]$: es gibt eine Umordnung mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}\}$ ist nicht konvex.
(Tip: Alle $x_n$ sind $\mathbb{Z}$-wertig.)

**Aufgabe V.6.**$**$ (Diskrete Hausdorff-Young-Ungleichung)
Sei $1 \leq p \leq 2$ und $1/p + 1/q = 1$.

(a) Sei $\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ der $n$-te komplexe Fourierkoeffizient der Funktion $f$. Dann ist der Operator

$$f \mapsto (\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

stetig von $L^p[0,2\pi]$ nach $\ell^q(\mathbb{Z})$.

(b) Sei $\gamma_n(t) = e^{int}$. Dann ist der Operator

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \gamma_n$$

stetig von $\ell^p(\mathbb{Z})$ nach $L^q[0,2\pi]$.

(Tip: Behandle zunächst $p = 1$ und $p = 2$ und benutze den Satz von Riesz-Thorin.)

**Aufgabe VI.7.**$**$ Es sei $T \in L(X)$ ein Operator mit $\|T\| \in \sigma(T)$. Dann gilt $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$.

**Aufgabe VI.7.13**

(a) Der Integrationsoperator $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator auf $L^2[0,1]$.

(b) Bestimme die singulären Zahlen von $T$ und entscheide, ob $T$ nuklear ist.

**Aufgabe VI.7.14** Sei $k \in C^1([0,1]^2)$ und $T_k$ der zugehörige Integraloperator auf $L^2[0,1]$, also

$$(T_k x)(s) = \int_0^1 k(s,t) x(t)\, dt.$$

Dann ist $T_k$ nuklear.
(Hinweis: Partielle Integration und Aufgabe VI.7.12.)

**Aufgabe VI.7.**$**$ Sei $k \in C([0,1]^2)$ symmetrisch und $T_k$: $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ der zugehörige Integraloperator. Der Kern $k$ heißt positiv semidefinit, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s_1, \dots, s_n \in [0,1]$ die Matrix $\big(k(s_i, s_j)\big)_{i,j=1,\dots,n}$ positiv semidefinit ist.

(a) $T_k$ ist genau dann positiv, wenn $k$ positiv semidefinit ist.

(b) Ist $k$ positiv semidefinit, so gilt

$$|k(s,t)|^2 \leq k(s,s) k(t,t) \qquad \forall s,t \in [0,1].$$

(c) Für $k(s,t) = |s-t|^\alpha$, $\alpha > 0$, ist $T_k$ nicht positiv.

**Aufgabe VII.4.**$**$ Zeige mittels eines Beispiels, daß der numerische Wertebereich eines Operators nicht abgeschlossen zu sein braucht.

**Aufgabe VII.4.3** (Analytischer Funktionalkalkül)
Es sei $T \in L(X)$ ein Operator auf einem Banachraum, und es definiere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$.

(a) Dann konvergiert die Reihe $f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ in $L(X)$.

(b) Ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$, so gilt $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

(c) Es gilt der Spektralabbildungssatz $\sigma\bigl(f(T)\bigr) = f\bigl(\sigma(T)\bigr)$.

(d) Ist $T$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so stimmt der soeben definierte Operator $f(T)$ mit dem aus Satz VII.1.3 überein.

**Aufgabe VII.4.**∗∗

(a) Sei $T_1 = d/dt$ auf dem Definitionsbereich

$$\mathrm{dom}(T_1) = \Bigl\{ f \in L^2[0,1] \colon \frac{df}{dt} \text{ existiert f.ü. und gehört zu } L^2[0,1] \Bigr\}.$$

Dann ist $\mathrm{dom}(T_1^*) = \{0\}$.
(Tip: Approximiere durch stückweise konstante Funktionen.)

(b) Sei $T_2 = d/dt$ auf dem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(T_2) = \mathrm{dom}(T_1) \cap C[0,1]$. Auch dann ist $\mathrm{dom}(T_2^*) = \{0\}$.
(Hinweis: Es ist hilfreich zu wissen, daß nicht konstante stetige monotone Funktionen $f$ mit $f' = 0$ f.ü. existieren, siehe Rudin [1986], S. 144.)

**Aufgabe VII.4.**∗∗ Bestimme die Objekte $[\,.\,,.\,]$, $J$, $K$, $J^*$ und $S$ aus dem Beweis von Satz VII.2.11 explizit, falls $T$ der Operator $Id - \Delta$ auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(Hinweis: Satz V.2.14.)

**Aufgabe VII.4.**∗∗ Zeige, daß die im Beweis von Satz VII.2.11 konstruierte Friedrichs-Erweiterung $S$

$$\mathrm{dom}(S) = \mathrm{dom}(T^*) \cap J(K), \quad S = T^*|_{\mathrm{dom}(T^*) \cap J(K)}$$

erfüllt.

**Aufgabe VIII.6.**∗∗ (Schwach kompakte Operatoren)
Ein Operator $T$ zwischen Banachräumen $X$ und $Y$ heißt schwach kompakt, wenn der Abschluß von $T(B_X)$ schwach kompakt ist.

(a) Ist $X$ oder $Y$ reflexiv, ist jeder Operator $T \in L(X,Y)$ schwach kompakt.

(b) Der Inklusionsoperator $J\colon C[0,1] \to L^1[0,1]$ ist schwach kompakt, aber nicht kompakt.

(c) Folgende Aussagen über einen Operator zwischen Banachräumen sind äquivalent:
  (i) $T$ ist schwach kompakt.
  (ii) $\mathrm{ran}(T'') \subset i(Y)$.
  (iii) $T'$ ist $\sigma(Y',Y)$-$\sigma(X',X'')$-stetig.
  (iv) $T'$ ist schwach kompakt.

(d) Der Raum $W(X,Y)$ aller schwach kompakten Operatoren bildet einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.

**Aufgabe VIII.6.**$**$ (Satz von Mackey-Arens)
Sei $(E,F)$ ein duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie $\tau$ auf $E$ heißt mit der Dualität dieses dualen Paares verträglich, falls, nach kanonischer Identifizierung, $(E_\tau)' = F$ gilt. Die von den Halbnormen $p_K(x) = \sup_{y\in K} |\langle x,y\rangle|$, wo $K \subset F$ $\sigma(F,E)$-kompakt und konvex ist, induzierte lokalkonvexe Topologie auf $E$ wird Mackey-Topologie genannt; Bezeichnung $\mu(E,F)$. Ziel der Aufgabe ist der *Satz von Mackey-Arens*:

- *Eine lokalkonvexe Topologie $\tau$ auf $E$ ist genau dann mit der Dualität von $(E,F)$ verträglich, wenn $\sigma(E,F) \subset \tau \subset \mu(E,F)$ gilt.*

(a) $\mathfrak{U} := \{B^\circ\colon B \subset F$ konvex und $\sigma(F,E)$-kompakt$\}$ bildet eine $\mu(E,F)$-Nullumgebungsbasis.

(b) Sei $\ell\colon E \to \mathbb{K}$ linear und $\mu(E,F)$-stetig. Dann existiert eine absolutkonvexe und $\sigma(F,E)$-kompakte Menge $K \subset F$ mit

$$|\ell(x)| \le \sup_{y\in K} |\langle x,y\rangle| \qquad \forall x \in E.$$

(c) Mit den Bezeichnungen von (b) gilt $\ell \in K$ bei kanonischer Inklusion $F \subset E^* := \{\varphi\colon E \to \mathbb{K}\colon\ \varphi \text{ linear}\}$.
(Hinweis: Arbeite mit dem dualen Paar $(E,E^*)$ und verwende den Satz von Hahn-Banach.)

(d) Zeige $(E_{\mu(E,F)})' = F$.

(e) Gelte $(E_\tau)' = F$, und sei $U$ eine abgeschlossene konvexe $\tau$-Nullumgebung. Dann ist $U \in \mathfrak{U}$ (siehe Teil (a)).
(Hinweis: Betrachte $U^\circ$.)

(f) Beweise den Satz von Mackey-Arens.

(g) Sei $E$ ein Banachraum, und betrachte das duale Paar $(E,E')$. Was ist die Mackey-Topologie $\mu(E,E')$?

**Aufgabe VIII.6.**$**$ Zeige, daß durch den Cauchyschen Hauptwert

$$T\varphi = \text{CH-}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

eine Distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definiert wird. Ist $T$ regulär?

**Aufgabe VIII.6.**$**$ Für eine Folge $(M_n)$ positiver reeller Zahlen und eine Folge $(m_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen definiere eine Halbnorm auf $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ durch

$$q_{(M_n),(m_n)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n \sup_{|x|\ge n-1} \sum_{k=0}^{m_n} |\varphi^{(k)}(x)|\right).$$

Dann erzeugt das System $Q$ all dieser Halbnormen die Topologie von $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.
Anleitung: Daß $\tau_Q$ gröber ist, ist einfach. Umgekehrt ist eine auf allen $\mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ stetige Halbnorm $p$ durch endlich viele $q \in Q$ abzuschätzen. Dazu arbeite mit einer Zerlegung der Eins, das sind $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \mathbf{1}$, $0 \le \varphi_n \le \mathbf{1}$, so daß $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \{x\colon n-1 \le |x| \le n+1\}$.

**Aufgabe IX.4.**∗∗ Zeige, daß in einer Banachalgebra im allgemeinen $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$ gilt.

**Aufgabe IX.4.**∗∗ Auf dem Raum $A$ aller komplexen Folgen $x = (x_n)_{n\geq 0}$ mit $\|x\| := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| e^{-n^2} < \infty$ betrachte die Faltung $(x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ als Multiplikation.

(a) $(A, *, \|\,.\,\|)$ ist eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.
(b) $J = \{x\colon x_0 = 0\}$ ist ein maximales Ideal, und jedes $x \in J$ hat den Spektralradius $r(x) = 0$.
(c) Für $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ ist $\sigma(x) = x_0$.
(d) Die Gelfandtransformation verschwindet auf $J$; insbesondere ist sie nicht injektiv.

**Aufgabe IX.4.**∗∗ Beschreibe die Gelfandtransformation der Algebra $B$ aus Aufgabe IX.4.5.

**Aufgabe IX.4.**∗∗ (Toeplitz-Operatoren)
Sei $H$ der von den Funktionen $z \mapsto z^n$, $n \geq 0$, aufgespannte abgeschlossene Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$ und $P$ die Orthogonalprojektion von $L^2(\mathbb{T})$ auf $H$. Für $f \in C(\mathbb{T})$ heißt der Operator $T_f\colon H \to H$, $\varphi \mapsto P(f\varphi)$, *Toeplitz-Operator*. Zeige, daß $\pi\colon C(\mathbb{T}) \to L(H)/K(H)$, $\pi(f) = T_f + K(H)$, ein stetiger $^*$-Homomorphismus der $C^*$-Algebra $C(\mathbb{T})$ in die Calkin-Algebra ist. Ist auch $f \mapsto T_f$ ein stetiger $^*$-Homomorphismus?
(Hinweis: Untersuche zunächst $f(z) = z^r$, $r \in \mathbb{Z}$.)

## Ergänzungen und Änderungen im Text:

`Seite 26, Beweis von I.2.5:`

*Beweis.* Gelte etwa $\dim X = n$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $X$ und $\|\,.\,\|$ eine Norm auf $X$. Wir werden zeigen, daß $\|\,.\,\|$ zur euklidischen Norm $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|_2 = \bigl(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\bigr)^{1/2}$ äquivalent ist.

Setze $M = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\} > 0$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für $\|\,.\,\|$ und der Hölderschen Ungleichung

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\,\|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2},$$

so daß

$$\|x\| \leq M\sqrt{n}\|x\|_2 \qquad \forall x \in X.$$

Damit ist $\|\,.\,\|$ bzgl. $\|\,.\,\|_2$ stetig, da aus $\|x_k - x\|_2 \to 0$

$$\bigl|\,\|x_k\| - \|x\|\,\bigr| \leq \|x_k - x\| \leq M\sqrt{n}\|x_k - x\|_2 \to 0$$

folgt. Ferner ist $S := \{x\colon \|x\|_2 = 1\}$ in $(X, \|\,.\,\|_2)$ abgeschlossen, denn $S$ ist abgeschlossenes Urbild $\|\,.\,\|_2^{-1}\bigl(\{1\}\bigr)$ der abgeschlossenen Menge $\{1\}$

unter der stetigen Abbildung $\|\,.\,\|_2$ (vgl. Lemma I.2.1(c)), und $S$ ist beschränkt bzgl. $\|\,.\,\|_2$, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. (Beachte, daß $\|\,.\,\|_2$ die übliche Topologie auf dem endlichdimensionalen Raum $X$ erzeugt.) Die stetige Funktion $\|\,.\,\|$ nimmt daher auf $S$ ihr Minimum $m \geq 0$ an, und da $\|\,.\,\|$ eine Norm und nicht nur eine Halbnorm ist, muß $m > 0$ gelten. Also folgt

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \qquad \forall x \in X,$$

denn $x/\|x\|_2 \in S$ für $x \neq 0$.

Damit ist jede Norm zu $\|\,.\,\|_2$ äquivalent, und das zeigt die Behauptung des Satzes. □

---

`Seite 43:`

Rudin [1986], S. 313, gibt einen funktionalanalytischen Beweis, der auf dem in Kapitel III zu diskutierenden Satz von Hahn-Banach sowie auf Aussagen über die Nullstellenlage beschränkter analytischer Funktionen beruht. Direktere Argumente findet man bei Cheney [1982], S. 198, oder bei von Golitschek, *J. Approximation Theory* 39 (1983) 394–395, der einen sehr einfachen Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingung $\sum 1/n_k = \infty$ vorschlägt. Übrigens kann man auch nicht ganze Exponenten und die Frage der Approximation in $L^p$ betrachten. In diesem Kontext wurden entsprechende Müntz-Szász-Theoreme von Borwein und Erdélyi (*J. London Math. Soc.* 54 (1996) 102–110) und Operstein (*J. Approximation Theory* 85 (1996) 233–235) bewiesen.

Ein anderes Problem ist die quantitative Untersuchung der Güte der Approximation einer stetigen Funktion durch Polynome bestimmten Grades, d.h., man möchte die Größenordnung des Fehlers

$$E_n(f) = \inf\{\|f - p\|_\infty \colon p \text{ ein Polynom vom Grad} < n\}$$

für $f \in C[a,b]$ abschätzen. (Das ist nichts anderes als die Quotientennorm der Äquivalenzklasse von $f$, wenn nach dem $n$-dimensionalen Unterraum der Polynome vom Grad $< n$ gefasert wird.) Es gilt hier der *Satz von Jackson*, wonach für eine $k$-mal stetig differenzierbare Funktion

$$E_n(f) \leq \frac{C(k)}{n^k}\|f^{(k)}\|_\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

mit einer nur von $k$ abhängigen Konstanten $C(k)$ gilt.

Abschließend sei auf einen Überblicksartikel zum Weierstraßschen Approximationssatz von Lubinsky hingewiesen (*Quaest. Math.* 18 (1995) 91–130).

---

`Seite 87:`

Das Problem, ob kompakte Operatoren stets durch endlichdimensionale approximiert werden können, mit anderen Worten, ob Korollar II.3.6 für jeden Banachraum $Y$ gilt, wurde erst 1973 von Enflo (*Acta Math.* 130 (1973) 309–317) durch ein Gegenbeispiel gelöst. Es ist dazu äquivalent, ob für $k \in C([0,1]^2)$ stets

$$\int_0^1 k(s,t)k(t,u)\,dt = 0 \ \forall s,u \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 k(s,s)\,ds = 0 \qquad \text{(II.23)}$$

gilt. (Ist $k$ ein Gegenbeispiel hierzu, so ist $Y = \overline{\operatorname{lin}}\{k(s,.)\colon s \in [0,1]\} \subset C[0,1]$ ein Gegenbeispiel zum Approximationsproblem, siehe Lindenstrauss/Tzafriri [1977], S. 35.) Die Frage nach (II.23) wurde schon im Schottischen Buch aufgeworfen (Problem 153, datiert von 6. November 1936; Mauldin [1981], S. 231); als Preis für die Antwort war „eine lebende Gans“ ausgesetzt worden. In der Tat wurde Enflo sein Preis 1973 in Warschau überreicht, das Ereignis ist auf einem Foto in Kałuża [1996] abgebildet. Gilt Korollar II.3.6 für einen Banachraum $Y$, so sagt man, $Y$ habe die *Approximationseigenschaft.* Alle „klassischen“ Funktionen- und Folgenräume besitzen diese Eigenschaft, wie in Korollar II.3.6 festgestellt wurde, und es ist auch heute nicht einfach, Gegenbeispiele zu produzieren; man vergleiche dazu etwa Lindenstrauss/Tzafriri [1977], S. 87–90. Es ist ein außerordentlich bemerkenswertes Resultat von Szankowski (*Acta Math.* 147 (1981) 89–108), daß der nicht separable Raum $Y = L(\ell^2)$ *nicht* die Approximationseigenschaft besitzt; Pisiers Darstellung des sehr schwierigen Beweises im Séminaire Bourbaki (Lecture Notes in Math. 770, S. 312–327) ist die einzige mir bekannte mathematische Arbeit, die mit dem Ausruf „Uff!“ endet.

---

`Seite 118, Zeile 6:`

Es sei außerdem auf die Arbeiten von König und seinen Schülern hingewiesen; als erste Orientierung diene sein Artikel „On some basic theorems in convex analysis“ in B. Korte (Hg.), *Modern Applied Mathematics – Optimization and Operations Research*, North-Holland 1982, S. 107–144.

---

`Seite 119:`

- (Satz von Pitt)
  *Für $1 \le q < p < \infty$ ist jeder stetige Operator von $\ell^p$ nach $\ell^q$ kompakt; ferner ist jeder stetige Operator von $c_0$ nach $\ell^q$ kompakt.*

… Übrigens impliziert der Satz von Pitt die Reflexivität von $L(\ell^p, \ell^q)$ für $1 < q < p < \infty$; Kaltons Arbeit *Math. Ann.* 208 (1974) 267–278 enthält dieses Resultat als Spezialfall.

---

`Seite 145, Beweis von Lemma IV.6.1(a):`
(a) Aus $\|P\| = \|P^2\| \le \|P\|^2$ folgt sofort $P = 0$ oder $\|P\| \ge 1$.

---

`Seite 175, Ende von Abschnitt V.2:`
Zum Schluß dieses Abschnitts sollen die Sobolevräume $W^m(\mathbb{R}^n)$ mittels der Fouriertransformation beschrieben werden.

**Satz V.2.14** *Es gilt*

$$W^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)\colon (1+|\xi|^2)^{m/2}\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{V.20}$$

*Beweis.* Die Inklusion „$\subset$“ folgt unmittelbar aus Lemma V.2.11, und „$\supset$“ praktisch auch: Der Beweis des Lemmas zeigt nämlich für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha| \le m$

$$(-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\varphi\rangle = (-i)^{|\alpha|}\langle \xi^\alpha \mathscr{F}f, \mathscr{F}\varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle,$$

wo $g := (-i)^{|\alpha|}(\mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha\mathscr{F})f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, falls $(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Satz V.2.14 eröffnet die Möglichkeit, die Sobolevräume $W^m(\mathbb{R}^n)$ für beliebige Exponenten $m \in \mathbb{R}$ zu erklären; (V.20) dient dann als Definition. Traditionell bezeichnet man reelle Exponenten mit $s$ statt mit $m$.

---

`Seite 179, Beweis von Theorem V.3.6, zweiter Absatz:`
Sei nun $x' \in H'$ gegeben, ohne Einschränkung sei $\|x'\| = 1$. Sei $U$ der Kern von $x'$. Dann gilt nach Theorem V.3.4 $H = U \oplus_2 U^\perp$, wo $U^\perp$ eindimensional ist. Es existiert daher $y \in H$ mit $x'(y) = 1$ und $U^\perp = \operatorname{lin}\{y\}$. Für $x = u + \lambda y \in U \oplus_2 U^\perp$ ist $x'(x) = \lambda x'(y) = \lambda$ sowie $\langle x, y\rangle = \lambda\|y\|^2$. Daher gilt $\Phi(y/\|y\|^2) = x'$, und $\Phi$ ist auch surjektiv. Übrigens liefert die Isometrie von $\Phi$ sogar $\|y\| = 1$, so daß man tatsächlich $\Phi(y) = x'$ erhält.

Damit ist das Theorem bewiesen. □

---

`Seite 201, letzter Absatz:`
Konvergiert eine (konvergente) Reihe $\sum x_n$ reeller Zahlen nicht unbedingt, so kann man bekanntlich zu jeder reellen Zahl $x$ eine Umordnung mit $\sum x_{\pi(n)} = x$ finden. Anders ausgedrückt können bei konvergenten reellen Reihen $\sum x_n$ für die Menge $\Sigma = \{x\colon \exists\pi\ \sum x_{\pi(n)} = x\}$ nur die Fälle $\Sigma = \{x_0\}$ oder $\Sigma = \mathbb{R}$ auftreten. Für konvergente Reihen komplexer Zahlen gibt es drei Möglichkeiten: $\Sigma = \{x_0\}$, $\Sigma = \mathbb{C}$, oder $\Sigma$ ist eine Gerade in der komplexen Ebene. Allgemeiner besagt der *Satz von Steinitz* für Reihen im $\mathbb{R}^n$, daß $\Sigma$ stets ein affiner Unterraum ist; ein Beweis dieses Satzes wird von P. Rosenthal in *Amer. Math. Monthly* 94 (1987) 342–351 dargestellt. Im Unendlichdimensionalen liegen die Dinge viel komplizierter. Im

Problem 106 des Schottischen Buches (Mauldin [1981], S. 188) fragte Banach, ob $\Sigma$ stets konvex sei; als Preis setzte er eine Flasche Wein aus. Wie aus Aufgabe V.6.$**$ hervorgeht, ist das im allgemeinen falsch; das Gegenbeispiel dieser Aufgabe (von Marcinkiewicz) ist ebenfalls im Schottischen Buch verzeichnet. Ein weit drastischeres Gegenbeispiel stammt von Kadets und Woźniakowski (*Bull. Pol. Acad. Sci.* 37 (1989) 15–21): In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existiert eine nur bedingt konvergente Reihe, so daß $\Sigma$ aus genau zwei Punkten besteht. Mehr zu diesem Problemkreis kann man bei Kadets/Kadets [1997] nachlesen.

---

`Seite 204:`

Eine moderne Weiterentwicklung der Fourieranalyse auf $\mathbb{R}$ (und in mancher Hinsicht ein Gegenstück dazu) ist die Theorie der wavelets. Ein *orthogonales wavelet* (frz. *ondelette*) ist eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die die Funktionen

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j), \qquad j,k \in \mathbb{Z}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ bilden. (Eigentlich sind die $\varphi_{j,k}$ die wavelets, und $\varphi$ wird auch *Mutterwavelet* genannt.) Ein einfaches Beispiel ist die Haarbasis, wo man von $\varphi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ ausgeht, vgl. Aufgabe V.6.$**$. Meyer hat 1985 wavelets $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ konstruiert, und Daubechies hat 1988 für jedes $m \in \mathbb{N}$ orthogonale wavelets der Klasse $C^m$ mit kompaktem Träger gefunden, die gleichzeitig Schauderbasen (Aufgabe IV.7.17) der Räume $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, bilden, die die wichtige Eigenschaft besitzen, daß für $\sum_{j,k}\langle f, \varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k} \in L^p(\mathbb{R})$ auch bei jeder Vorzeichenwahl $\sum_{j,k} \pm\langle f, \varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k} \in L^p(\mathbb{R})$ gilt. Diese Eigenschaft ist zur unbedingten Konvergenz der Reihe äquivalent, und man spricht dann von einer *unbedingten* Schauderbasis; das trigonometrische System ist zwar eine Schauderbasis von $L^p[0,2\pi]$ für $1 < p < \infty$, aber keine unbedingte Basis, wenn $p \neq 2$ ist. Zu wavelets und ihren Anwendungen siehe Daubechies [1992], Meyer [1992] und Wojtaszczyk [1997].

---

`Seite 206, Beispiel (b):`

(b) Ist $X$ ein Hilbertraum und $T$ ein selbstadjungierter Operator, so gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Das wird in Korollar VII.1.2 gezeigt. Daher muß nach Satz V.5.2(g) $\sigma_r(T) = \emptyset$ sein.

---

`Seite 272, Ende des ersten Absatzes:`

Alternativ kann man auch so schließen: $\mu - f(T)$ ist Limes der Folge $\bigl(g_n(\lambda) - g_n(T)\bigr)$, die aus nicht stetig invertierbaren Operatoren besteht. Nach Aufgabe VI.7.5 ist auch $\mu - f(T)$ nicht stetig invertierbar.

---

`Seite 283, nach Korollar VII.1.16:`

Wie im kompakten Fall setzt man $|T| = (T^*T)^{1/2}$, und wie im kompakten Fall erhält man die Polarzerlegung eines beschränkten Operators:

**Korollar VII.1.17** *Zu $T \in L(H)$ existiert eine partielle Isometrie $U$ mit $T = U|T|$.*

*Beweis.* Wörtlich wie bei Satz VI.3.5. $\square$

---

`Seite 300:`

Eine wichtige Klasse von symmetrischen Operatoren, die selbstadjungierte Erweiterungen besitzen, sind die *halbbeschränkten Operatoren*, die eine Ungleichung der Form

$$\langle Tx, x\rangle \geq C\|x\|^2 \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(T) \tag{VII.13}$$

bzw.

$$\langle Tx, x\rangle \leq C\|x\|^2 \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(T) \tag{VII.14}$$

für ein $C \in \mathbb{R}$ erfüllen. Beachte, daß nach Aufgabe VII.4.10 halbbeschränkte Operatoren symmetrisch sind. Zum Beispiel ist der Laplaceoperator aus Beispiel (d) halbbeschränkt.

**Satz VII.2.11** (Friedrichs-Erweiterung)
*Jeder dicht definierte halbbeschränkte Operator besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung. Genauer gilt: Erfüllt $T\colon H \supset \operatorname{dom}(T) \to H$ die Ungleichung* (VII.13) *bzw.* (VII.14)*, so existiert eine selbstadjungierte Erweiterung, die dieser Ungleichung mit derselben Konstanten genügt.*

Der Kern des Beweises ist das folgende Lemma.

**Lemma VII.2.12** *Seien $H$ und $K$ Hilberträume, und sei $J \in L(K, H)$ ein injektiver Operator mit dichtem Bild. Dann ist $JJ^* \in L(H)$ ein injektiver Operator mit dichtem Bild, und der Umkehroperator $S\colon H \supset \operatorname{ran}(JJ^*) \to H$ ist selbstadjungiert.*

*Beweis.* Weil $J$ dichtes Bild hat, ist $J^*$ und deshalb auch $JJ^*$ injektiv (Satz V.5.2(g)). Als selbstadjungierter Operator hat $JJ^*$ daher dichtes Bild, und $S$ ist dicht definiert. Die Selbstadjungiertheit von $S$ schließen wir aus Satz VII.2.8. Es ist klar, daß $S$ symmetrisch ist, und um die Surjektivität von $S \pm i$ zu zeigen, sind bei gegebenem $y \in H$ die Gleichungen $(S \pm i)x = y$ in $\operatorname{dom}(S)$ zu lösen. Diese sind äquivalent zu $(Id \pm iJJ^*)x = JJ^*y$, und da der selbstadjungierte Operator $JJ^*$ reelles Spektrum hat, gibt es Lösungen in $H$, die wegen $x = JJ^*(y \mp ix)$ in $\operatorname{dom}(S) = \operatorname{ran}(JJ^*)$ liegen. $\square$

*Beweis von Satz VII.2.11.* Indem man statt $T$ Operatoren der Gestalt $\pm T + \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachtet, darf man annehmen, daß $T$ der Ungleichung $\langle Tx, x\rangle \geq \|x\|^2$ genügt. Betrachte nun die durch

$$[x, y] = \langle Tx, y\rangle$$

auf $\operatorname{dom}(T) \times \operatorname{dom}(T)$ definierte Sesquilinearform, die wegen $[x, x] \geq \|x\|^2$ für alle $x \in \operatorname{dom}(T)$ positiv definit ist. So erhält $\operatorname{dom}(T)$ die Struktur eines Prähilbertraums, dessen Vervollständigung $K$ genannt werde; die induzierte Norm sei $|||x||| = [x, x]^{1/2}$.

Offensichtlich ist der identische Operator von $(\operatorname{dom}(T), |||\,.\,|||)$ nach $H$ kontraktiv, daher existiert eine kontraktive Fortsetzung $J \in L(K, H)$ (vgl. Satz II.1.5). Es gilt

$$[x, y] = \langle Tx, Jy\rangle \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(T),\ y \in K,$$

denn für $y \in \operatorname{dom}(T)$ gilt dies definitionsgemäß, und für die übrigen $y \in K$ folgt es durch stetige Ausdehnung. Insbesondere ist $J$ injektiv, da aus $Jy = 0$ die $[\,.\,,\,.\,]$-Orthogonalität von $y$ auf dem dichten Teilraum $\operatorname{dom}(T)$ von $K$ folgt.

Wir sind also in der Situation von Lemma VII.2.12 und betrachten den dort als selbstadjungiert erkannten Operator $S$; dieser leistet das Gewünschte. Es gilt nämlich für $x \in \operatorname{dom}(T)$, $y \in K$

$$[x, y] = \langle Tx, Jy\rangle = [J^*Tx, y],$$

also $x = J^*Tx = JJ^*Tx$, denn $J = Id$ auf $\operatorname{dom}(T)$. Das zeigt $\operatorname{dom}(T) \subset \operatorname{dom}(S)$, und da nach Konstruktion ebenfalls $x = JJ^*Sx$ gilt und $JJ^*$ injektiv ist, erhält man $T \subset S$. Schließlich ist $\langle Sx, x\rangle \geq \|x\|^2$ auf $\operatorname{dom}(S)$ zu zeigen. Schreibt man $x = JJ^*\xi$, so ergibt sich dies aus

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \xi, JJ^*\xi\rangle = [J^*\xi, J^*\xi] = |||J^*\xi|||^2 \geq \|JJ^*\xi\|^2 = \|x\|^2,$$

da $J$ kontraktiv ist. $\square$

**Korollar VII.2.13** *Sei* $A\colon H \supset \operatorname{dom}(A) \to H$ *ein abgeschlossener dicht definierter Operator. Dann ist der Operator* $A^*A$ *mit dem Definitionsbereich* $\operatorname{dom}(A^*A) = \{x \in \operatorname{dom}(A)\colon Ax \in \operatorname{dom}(A^*)\}$ *dicht definiert und selbstadjungiert.*

*Beweis.* Es ist klar, daß $A^*A$ auf dem genannten Definitionsbereich symmetrisch ist; weit weniger klar ist, daß dieser dicht ist. Um das einzusehen, versehen wir $\operatorname{dom}(A)$ mit dem Skalarprodukt

$$[x, y] = \langle x, y\rangle + \langle Ax, Ay\rangle;$$

da $A$ abgeschlossen ist, wird $\mathrm{dom}(A)$ so zu einem Hilbertraum, der mit $K$ bezeichnet sei. Ferner sei $J \in L(K,H)$ der Inklusionsoperator.

Wir zeigen nun $\mathrm{ran}(JJ^*) \subset \mathrm{dom}(A^*A)$; weil $JJ^*$ dichtes Bild hat (vgl. Lemma VII.2.12), folgt daraus die behauptete Dichtheit. Sei also $y \in H$ und $x = JJ^*y = J^*y \in \mathrm{ran}(JJ^*)$. Dann ist nach Definition von $J^*$ natürlich $x \in K = \mathrm{dom}(A)$. Um zu zeigen, daß $Ax$ in $\mathrm{dom}(A^*)$ liegt, ist die Stetigkeit von $\xi \mapsto \langle A\xi, Ax\rangle$ in der Norm von $H$ zu beweisen; diese ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\langle A\xi, Ax\rangle &= [\xi, x] - \langle \xi, x\rangle = [\xi, J^*y] - \langle \xi, x\rangle \\ &= \langle J\xi, y\rangle - \langle \xi, x\rangle = \langle \xi, y - x\rangle.\end{aligned}$$

Damit ist auch der Operator $T = Id + A^*A$ dicht definiert und halbbeschränkt. Konstruiert man die Friedrichs-Erweiterung wie im Beweis von Satz VII.2.11, so haben die Symbole $J$ und $K$ hier dieselbe Bedeutung wie dort. Die Friedrichs-Erweiterung $S$ ist nun auf $\mathrm{dom}(S) = \mathrm{ran}(JJ^*)$ definiert; folglich gilt $S = T$, und $T$ selbst und damit auch $A^*A$ ist selbstadjungiert. □

---

`Seite 310, Mitte:`

Satz VII.2.11 wurde von Friedrichs (1934) und Stone (1932) gezeigt, der Beweis im Text folgt der Methode von Friedrichs (*Math. Ann.* 109 (1934) 465–487). Vorher hatte von Neumann eine etwas schwächere Form dieses Satzes bewiesen, nämlich: Ist $T$ halbbeschränkt mit $\langle Tx, x\rangle \geq C\|x\|^2$, so existiert für jedes $c < C$ eine selbstadjungierte Erweiterung $S_c$ mit $\langle S_c x, x\rangle \geq c\|x\|^2$. Sein Beweis ist in der 1. Auflage dieses Buchs zu finden.

---

`Seite 314, vorletzter Absatz:`

Abschließend soll kurz der Fall von Operatoren auf Banachräumen zur Sprache kommen. Auch hier gibt es Klassen von Operatoren, die wie selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen spektral zerlegt werden können; Dunford/Schwartz [1971] beschäftigen sich intensiv mit dieser Problematik. Für einen beliebigen Operator auf einem komplexen Banachraum kann man mit Mitteln der Funktionentheorie einen Funktionalkalkül für *analytische* Funktionen aufbauen. Der einfachste Fall eines solchen symbolischen Kalküls ist in Aufgabe VII.4.3 beschrieben; wesentlich weitgehendere Resultate erhält man jedoch, wenn man den Cauchyschen Integralsatz benutzt. Diese Idee geht auf F. Riesz (1913) zurück und wurde von N. Dunford (1943) in größerer Allgemeinheit ausgeführt. Sei $T \in L(X)$. Man bezeichne mit $\mathscr{O}(T)$ die Menge der in einer offenen Umgebung von $\sigma(T)$ definierten analytischen komplexwertigen Funktionen. Der Definitionsbereich $U_f$ von $f \in \mathscr{O}(T)$ variiert mit $f$ und braucht nicht zusammenhängend zu sein

– das Spektrum kann schließlich eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ bilden –, und der Definitionsbereich von $f+g$ bzw. $fg$ ist natürlich $U_f \cap U_g$. Ist $U_f$ nicht zusammenhängend, so wird der Analytizitätsbegriff übrigens lokal verstanden: Jeder Punkt besitzt eine Umgebung, auf der $f$ im elementaren Sinn analytisch ist. Für eine Funktion $f \in \mathscr{O}(T)$ läßt sich nun mit Hilfe eines Umlaufintegrals ein Operator $f(T)$ definieren. Dazu sei $\Gamma \subset U_f \setminus \sigma(T)$ eine endliche Vereinigung geschlossener Kurven (ein „Zykel"), so daß die Umlaufzahl von $\Gamma$ um jeden Punkt von $\sigma(T)$ gleich $+1$ ist („$\Gamma$ umrundet $\sigma(T)$ genau einmal im positiven Sinn"). Solche Zykeln existieren stets, können jedoch beliebig kompliziert aussehen, insbesondere, wenn $\sigma(T)$ unzusammenhängend ist. Man setze nun

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) R_\lambda(T)\, d\lambda.$$

So ein operatorwertiges Integral definiert man genau wie in der Funktionentheorie, und offensichtlich stand die Cauchysche Integralformel Pate bei der Definition von $f(T)$. Man kann zeigen, daß $f(T)$ nicht von der speziellen Wahl von $\Gamma$ abhängt und daß die üblichen Eigenschaften eines Funktionalkalküls gelten:

- $f(T) = Id$ *für* $f = \mathbf{1}$, $f(T) = T^n$ *für* $f(z) = z^n$,
- $(f+g)(T) = f(T) + g(T) \quad \forall f, g \in \mathscr{O}(T)$,
- $(fg)(T) = f(T)g(T) \quad \forall f, g \in \mathscr{O}(T)$,
- $\sigma\big(f(T)\big) = f\big(\sigma(T)\big) \quad \forall f \in \mathscr{O}(T)$,
- $(f \circ g)(T) = f\big(g(T)\big) \quad \forall g \in \mathscr{O}(T),\ f \in \mathscr{O}\big(g(T)\big)$.

Insbesondere sind Wurzeln oder der Logarithmus eines Operators erklärt, wenn $\sigma(T)$ etwa in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z\colon\ \operatorname{Re} z \le 0\}$ liegt.

Für einen selbstadjungierten Operator kann man zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A$ des Spektrums eine Projektion assoziieren; das gelingt im allgemeinen Fall nicht mehr, wohl aber, wenn $\sigma(T) \setminus A$ ebenfalls abgeschlossen ist. (Außer $\emptyset$ und $\sigma(T)$ gibt es solche $A$ nur, wenn $\sigma(T)$ nicht zusammenhängend ist.) In diesem Fall betrachte eine Funktion $f$, die auf einer Umgebung von $A$ den Wert 1 und auf einer Umgebung von $\sigma(T) \setminus A$ den Wert 0 annimmt. Da dann $f^2 = f$ ist, ist auch $f(T)^2 = f(T)$; also ist $f(T)$ eine Projektion, die im übrigen mit $T$ kommutiert. Besonders wichtig ist der Fall eines isolierten Punkts $\lambda_0$ des Spektrums. Die zugehörige Spektralprojektion kann nun durch

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma R_\lambda(T)\, d\lambda$$

definiert werden, wo $\gamma$ ein hinreichend kleiner positiv orientierter Kreis um $\lambda_0$ ist. Die Resolventenabbildung besitzt jetzt bei $\lambda_0$ eine isolierte Singularität, die wie in der Funktionentheorie durch die Laurentreihe als Pol oder als wesentliche Singularität klassifiziert werden kann. Falls es sich um einen Pol der Ordnung $p$ handelt, ist $\lambda_0$ ein Eigenwert, und $\operatorname{ran}(P)$ ist der Hauptraum $\ker(\lambda_0 - T)^p$ zum Eigenwert $\lambda_0$, im Fall eines einfachen Pols also der Eigenraum. Diese Resultate kann man z.B. bei Conway [1985], Dunford/Schwartz [1958] oder Heuser [1992] nachlesen.

---

`Seite 336, Beweis von Korollar VIII.3.12:`

*Beweis.* Wende Theorem VIII.3.12 mit $U = B_X$ an. Diejenigen Leser, die nur an diesem Korollar interessiert sind, sollten den obigen Beweis mit $U = B_X$, $U^\circ = B_{X'}$ und $\lambda_x = \|x\|$ lesen. $\square$

---

`Seite 343, Zeile 4:`

Widerspruch, denn wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft ist $C_0 \neq \emptyset$.

---

`Seite 367:`

... Der *Satz von Ehrenpreis-Malgrange* beantwortet diese Frage.

- *Ist $L \neq 0$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so besitzt $L$ Grundlösungen $E_a \in \mathscr{D}'$.*

Dieser Satz wird z.B. in Rudin [1991] bewiesen; an entscheidender Stelle wird der Satz von Hahn-Banach benutzt. Tatsächlich gibt es sogar Grundlösungen in $\mathscr{S}'$, wie von Hörmander 1958 und Łojasiewicz 1959 gezeigt wurde. Verschiedene andere Beweismethoden werden von Ortner und Wagner in ihrer Note in S. Dierolf, S. Dineen, P. Domański (Hg.), *Functional Analysis*, de Gruyter 1996, S. 343–352, gegenübergestellt; insbesondere bringen sie eine Variante von Königs Beweis (*Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994) 1315–1318), der eine explizite Formel für eine Grundlösung angibt.

Gerade wurde bemerkt, daß für einen linearen Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^{(\alpha)}$ mit konstanten Koeffizienten die Gleichung $L(T) = \psi$ für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Es erhebt sich die Frage, wann jede solche Distributionenlösung eine klassische Lösung, d.h. $\in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ ist. Differentialoperatoren mit dieser Eigenschaft werden *hypoelliptisch* genannt, sie können mit Hilfe der Nullstellenmenge des assoziierten Polynoms $P(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha x^\alpha$ charakterisiert werden (Satz von Hörmander). Beispiele solcher Operatoren sind die elliptischen Differentialoperatoren, die durch die Forderung $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \neq 0$ für $x \neq 0$ definiert sind, insbesondere der Laplaceoperator. Auch parabolische Operatoren wie der Wärmeleitungsoperator $\partial/\partial t - \Delta$ sind hypoelliptisch; hingegen sind der zeitabhängige Schrödingeroperator $\partial/\partial t - i\Delta$ oder hyperbolische Operatoren wie der Wellenoperator $\partial^2/\partial^2 t - \Delta$ nicht hypoelliptisch. Beim Beweis solcher Regularitätssätze spielt das Lemma von Sobolev, Satz V.2.12, eine entscheidende

Rolle. Die dort verwendeten Sobolevräume lassen sich übrigens jetzt leichter handhaben, denn die $W^m(\Omega)$ lassen sich als Hilberträume von (regulären) Distributionen auffassen.

---

`Seite 399, Ende des ersten Absatzes:`

...

er keinen Beweis. Seine Arbeit inklusive vollständiger Beweise war nämlich zu umfangreich, um in den *Comptes Rendus* zu erscheinen; daher verlangten die Herausgeber eine Straffung des Texts. Diese Informationen findet man in Żelazko [1973], S. 18, der fortfährt: „The only sensible way of a shortening was to leave out all the proofs, and the paper was finally so published.“ Erst 35 Jahre später wurde Mazurs Beweis tatsächlich veröffentlicht, und zwar auf S. 19–22 in Żelazkos Buch. Mazurs Zugang funktioniert auch im reellen Fall und zeigt, daß die einzigen Banachalgebren über dem Körper $\mathbb{R}$, in dem jedes von 0 verschiedene Element ein Inverses besitzt, endlichdimensional und daher nach dem Satz von Frobenius $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ sind.

---

`Seite 402, Ende von Abschnitt IX.5:`

Die Auflösungstheorie von Operatorgleichungen der Form $Tx = y$ bedient sich der Spektraltheorie in der Banachalgebra $L(X)$, insbesondere wenn kompakte Operatoren beteiligt sind. Für gewisse singuläre Integralgleichungen spielt auch die Calkin-Algebra eine große Rolle. Um diesen Zusammenhang zu erläutern, benötigt man den Begriff des Fredholmoperators. Ein Operator $T$ auf einem Banachraum $X$ heißt *Fredholmoperator*, falls $\operatorname{ran}(T)$ abgeschlossen ist und $\ker(T)$ und $X/\operatorname{ran}(T)$ endlichdimensional sind; übrigens folgt die erste dieser Eigenschaften nach einem Satz von Kato automatisch aus der letzten. Die ganze Zahl $\operatorname{ind}(T) = \dim\ker(T) - \dim\operatorname{ran}(X/\operatorname{ran}(T))$ $(= \dim\ker(T) - \dim\ker(T'))$ heißt dann der *Index* von $T$. Ist z.B. $T_f$ der Toeplitz-Operator aus Aufgabe X.4.∗∗ und verschwindet $f$ nirgends, so ist $T_f$ ein Fredholmoperator, dessen Index gleich dem Negativen der aus der Funktionentheorie bekannten Umlaufzahl der durch $t \mapsto f(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, parametrisierten Kurve um 0 ist. Man kann zeigen, daß die Komposition von zwei Fredholmoperatoren $U$ und $T$ wieder ein Fredholmoperator mit dem Index $\operatorname{ind}(UT) = \operatorname{ind}(U)+\operatorname{ind}(T)$ ist, und der adjungierte Operator $T'$ ist ein Fredholmoperator mit $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$. Ferner ist die Menge aller Fredholmoperatoren offen, und der Index ist eine stetige $\mathbb{Z}$-wertige Funktion. Das bedeutet mit anderen Worten, daß es zu einem Fredholmoperator $T$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß jeder Operator $S$ mit $\|S - T\| < \varepsilon$ ebenfalls ein Fredholmoperator mit demselben Index ist; der Index bleibt also unter „kleinen“ Störungen invariant. Ein anderes Störungsresultat bezieht sich auf kompakte Operatoren: Ist $K$ kompakt, so gilt $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$. Dieses Resultat schließt insbesondere den Satz von Riesz-Schauder (Satz VI.2.1) ein; man muß nur $T = Id$ setzen. Eine wichtige Charakterisierung von Fredholmoperatoren liefert der *Satz von Atkinson*:

- *Ein Operator $T \in L(X)$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn ein Operator $S \in L(X)$ existiert, so daß $ST - Id$ und $TS - Id$ kompakt sind.*

Ein solcher Operator $S$ wird Fredholm-Inverse oder Parametrix genannt. Der Satz von Atkinson läßt sich besonders durchsichtig mittels der Quotienten-Banachalgebra $L(X)/K(X)$ formulieren:

- *$T \in L(X)$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn die entsprechende Äquivalenzklasse $[T]$ in der Banachalgebra $L(X)/K(X)$ invertierbar ist.*

Die Untersuchung des Spektrums von $[T]$ gestattet weitere Aufschlüsse über das Spektrum eines Operators; man nennt $\sigma_{\text{ess}}(T) := \sigma([T])$ das *wesentliche Spektrum* von $T$. (Dieser Begriff wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet.) Zum Beispiel ist jedes Element von $\partial\sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$ ein isolierter Punkt des Spektrums und ein Eigenwert von $T$. Detaillierte Informationen zu Fredholmoperatoren findet man unter anderem in Heuser [1992], Jörgens [1970] oder Conway [1985].

---

`Literaturhinweise:`

E. W. Cheney: *Introduction to Approximation Theory.* Chelsea, 2. Auflage, 1982.

I. Daubechies: *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, 1992.

T. W. Gamelin: *Uniform Algebras.* Chelsea, 2. Auflage, 1984.

▶ P. Habala, P. Hájek, V. Zizler: *Introduction to Banach Spaces.* Matfyzpress, 1996.

M. I. Kadets, V. M. Kadets: *Series in Banach Spaces.* Birkhäuser, 1997.

R. Kałuża: *The Life of Stefan Banach.* Birkhäuser, 1996.

P. Wojtaszczyk: *A Mathematical Introduction to Wavelets.* Cambridge University Press, 1997.

E. Zeidler: *Applied Functional Analysis* (2 Bde.). Springer, 1995.

W. Żelazko: *Banach Algebras.* Elsevier, 1973.