Ausgewählte Aufgaben zum Grundbereich
des Staatsexamens in Mathematik

Elementargeometrie

zusammengestellt von

Sabine Giese, Josef Heringlehner, Birgit Mielke,

Hans Mielke und Ralph-Hardo Schulz

38 Aufgaben, davon 18 mit Lösungen.
Fassung vom 31. März 2003

Die Lösungen bzw. Lösungshinweise wurden sorgfältig erstellt, trotzdem können wir keine Gewähr übernehmen. Kommentare sind willkommen (z.B. per E-mail an schulz@math.fu-berlin.de).
An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei Christoph Kapsch für Beiträge zur Aufgabensammlung und bei Jennifer Eisfeldt, Sonja Ernst, Prof. Dr. Rudolf Gorenflo, Prof. Eberhard Letzner, Veronika Liebich, Julian Pfab, Gregor Schulz und Ariane Weigandt für Hinweise auf Fehler bzw. Druckfehler, auf missverständliche Formulierungen oder fehlerhafte Interpretationen von Aufgabenstellungen in früheren Fassungen dieser Aufgabensammlung bedanken.

Aufgaben

Aufgabe EG1:

Beweisen Sie mit Hilfe von Kongruenzbetrachtungen den Satz: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine beiden Diagonalen gleich lang sind.

Aufgabe EG2:

Es seien N, P, Q nicht-kollineare Punkte. Zeigen Sie:

(a) Jede Translation bildet eine Ebene auf eine dazu parallele Ebene ab.

(b) Die Translation τ_{NP} und die Translation $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}$ lassen die Ebene NPQ fest.

Aufgabe EG3:

Sei E eine desarguessche euklidische Ebene.

(a) In E sei φ Produkt zweier verschiedener Punktspiegelungen π_P und π_Q. Zeigen Sie, dass φ eine Translation entlang der Geraden PQ ist.

(b) In E sei σ Produkt einer Punktspiegelung und einer Geradenspiegelung. Bestimmen Sie eine Gerade g, so dass sich σ als Produkt einer Translation entlang g und der Geradenspiegelung γ_g darstellen lässt.

Hinweis: Eigenschaften von Geradenspiegelungen und von deren Kompositionen dürfen benutzt werden.

Aufgabe EG4:

Zeigen Sie: In der reellen euklidischen Ebene liegt der größeren Seite eines Dreiecks der größere Winkel gegenüber.

Aufgabe EG5:

(a) Zeigen Sie mittels Spiegelungen: Zwei Geraden der reellen euklidischen Ebene E, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen, sind parallel.

(b) Zeigen Sie: Sind g und h zwei Geraden von E mit $g \cap h = \{T\}$, so ist $\delta := \gamma_g \circ \gamma_h$ (wobei γ_g bzw. γ_h die Spiegelung an der Geraden g bzw. h bezeichnet) eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt.

(c) Um welche Bewegung handelt es sich bei δ? (Ohne Beweis.)

Aufgabe EG6:

Beweisen Sie den Satz über den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines nicht ausgearteten Dreiecks der reellen euklidischen Ebene mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes.
Hinweis: Betrachten Sie $\sigma_{m_a} \circ \sigma_g \circ \sigma_{m_b}$ für eine geeignete Gerade g.

Aufgabe EG7:

Zeigen Sie, dass im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$h_c = \frac{ab}{c},$$

wobei a, b die Länge der Katheten, h_c die Länge der Höhe durch C und c die Länge der Hypotenuse bezeichnet.
Hinweis: Klassische Sätze der euklidischen Geometrie dürfen ohne Beweis verwandt werden.

Aufgabe EG8:

Beweisen Sie elementargeometrisch durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung: Schneiden sich innerhalb eines Kreises zwei Sehnen $\overline{PQ}$ und $\overline{RT}$ in einem Punkt S, so gilt:

$$|\overline{PS}| \cdot |\overline{SQ}| = |\overline{RS}| \cdot |\overline{ST}|.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis Winkelsätze am Kreis und die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke benutzen.

Aufgabe EG9:

Zeigen Sie für ein Dreick $\triangle ABC$ der euklidischen Ebene mit den Seitenlängen $a = |\overline{BC}|$, $c = |\overline{AB}|$ und den Höhenlängen h_a, h_c die Beziehung

$$ah_a = ch_c$$

Aufgabe EG10:

Wie kann man mit Zirkel und Lineal Winkel von $60^\circ, 30^\circ$ und 90° konstruieren?
Begründen Sie ihre Aussagen über Winkelgrößen! (Dabei dürfen Sie Sätze der Elementargeometrie über Mittelsenkrechte bzw. über gleichseitige Dreiecke unbewiesen benutzen.)

Aufgabe EG11:

Unter welchen Bedingungen sind folgende Figuren der reellen euklidischen Ebene ähnlich?

(a) zwei Quadrate

(b) zwei Rechtecke

(c) zwei Parallelogramme

(d) zwei Rauten

(e) zwei regelmäßige n-Ecke

Begründen Sie Ihre Aussagen! (Sätze über Dreiecke oder zentrische Streckungen dürfen ohne Beweis verwendet werden.)

Aufgabe EG12:

Beweisen Sie mit Hilfe von Bewegungen die Existenz der Winkelhalbierenden eines Winkels $\angle(p,q)$ einer desarguesschen euklidischen Ebene.
Hinweis: Benutzt werden darf die „freie Beweglichkeit“, die Möglichkeit des Strecken- bzw. Winkelabtragens, die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunkts einer Strecke, Eigenschaften von Bewegungen, insbesondere Spiegelungen.

Aufgabe EG13:

Beweisen Sie den „Satz von Thales“: Jeder Winkel im Halbkreis (einer euklidischen Ebene) ist ein rechter.
Hinweis: Sie dürfen Eigenschaften von gleichschenkligen Dreiecken, von Stufen- und Wechselwinkeln benutzen. Vermeiden Sie den Satz über die Winkelsumme im Dreieck.

Aufgabe EG14:

Eine Gerade teile zwei Seiten eines Dreiecks echt innen und eine Seite außen. Für jede Seite bilde man – zyklisch vorgehend – das Verhältnis der vom Teilpunkt zu den beiden Ecken gemessenen Entfernungen.
Man beweise: Das Produkt dieser drei Zahlen hat den Wert 1 (Satz von Menelaos).
Hinweis: Man fälle von den Ecken Lote auf die „Menelaosgerade“.

Aufgabe EG15:

Beweisen Sie: Peripheriewinkel im Kreis über demselben Bogen sind kongruent.

Aufgabe EG16:

(a) Jede Komposition von zwei Punktspiegelungen ist als Komposition von Spiegelungen an zwei parallelen Geraden darstellbar.

(b) a, b, c seien drei verschiedene parallele Geraden. Dann ist $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ eine Spiegelung σ_d mit $d \parallel a$.

Aufgabe EG17:

Zeigen Sie: Im 3-dimensionalen affinen Raum ist genau dann keine Translation involutorisch, wenn sich die Diagonalen jedes nicht-ausgearteten Parallelogramms schneiden.
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie sonstige Eigenschaften von Translationen verwenden, u.a., dass die Spuren parallel und Fixgeraden sind und Bildpunkte durch Parallelogrammm-Konstruktionen bestimmbar sind.

Aufgabe EG18:

Sei R ein euklidischer Raum, g Gerade und P Punkt von R, $P \notin g$. Zeigen Sie die Existenz eines Lots von P auf g.

Hinweis: Benutzt werden darf die Möglichkeit des Winkelantragens und des Streckenabtragens sowie der Kongruenzsatz SWS. Unter einem rechten Winkel versteht man hier einen Winkel, der zu seinem Nebenwinkel kongruent ist. Benutzt werden darf auch, dass die Verbindungsstrecke zweier Punkte verschiedener Halbebenen zu g einen Punkt mit g gemeinsam hat.

Aufgabe EG19:

(a) Definieren sie den Begriff eines Kreises K (um den Mittelpunkt M mit Radius $r > 0$) in der euklidischen Ebene E.

(b) Zeigen Sie dann (unter der Voraussetzung $K \neq \emptyset$):

  (i) Jede Gerade durch M schneidet K in genau zwei Punkten.

  (ii) Jede Gerade der Ebene schneidet K in höchstens zwei Punkten.

  (iii) Die Mittelsenkrechte jeder Sehne von K geht durch M.

Hinweis: Folgendes dürfen Sie ohne Beweis verwenden: Eigenschaften des Streckenabtragens, der Winkel im gleichschenkligen Dreieck, Aussagen über die Länge von Hypotenuse und Kathete im rechtwinkligen Dreieck, Eigenschaften der Kongruenz von Winkeln bzw. Strecken sowie die Existenz und die Eigenschaften von Mittelpunkt und Mittelsenkrechter einer Strecke.

Aufgabe EG20:

Seien g und h zwei parallele Geraden der reellen euklidischen Ebene E. Zeigen Sie ohne Verwendung der Kongruenzsätze, dass die Komposition $\gamma_g \circ \gamma_h$ der Geradenspiegelungen γ_g, γ_h mit Achse g bzw. h eine Translation ist.
Hinweis:

(i) Unter einer Translation verstehen wir hier eine fixpunktfreie Dilatation oder die Identität.

(ii) Sie dürfen grundlegende Eigenschaften von Geradenspiegelungen ohne Beweis verwenden, z.B. dass γ_g und γ_h Bewegungen sind, also winkel- und längentreue Kollineationen, und dass $\gamma_g^2 = \mathrm{id}$.

(iii) Beim Nachweis, dass kein Fixpunkt F existiert, betrachte man $|\overline{FG}|$ und $|\overline{\tau(F)\tau(G)}|$ für den Fußpunkt G des Lots von F auf g.

Aufgabe EG21:

In einem dreidimensionalen euklidischen Raum sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c gegeben, und es sei $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie, dass dann die Seiten a und b einen rechten Winkel einschließen.
Hinweis: Benutzen dürfen Sie den Satz des Pythagoras und die Kongruenzsätze.
Lösung siehe Seite: 11.

Aufgabe EG22:

Formulieren sie den Höhensatz des Euklid für das rechtwinklige Dreieck. Beweisen Sie ihn mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und des Kathetensatzes.
Lösung siehe Seite: 11.

Aufgabe EG23:

Zeigen Sie: Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei kongruente Winkel besitzt.
Lösung siehe Seite: 11.

Aufgabe EG24:

Beweisen Sie: Sind A und B zwei (verschiedene) Punkte einer Kreisperipherie in der reellen euklidischen Ebene, so schneidet die Sekante durch A und B die Peripherie in keinem weiteren Punkt.
Hinweis: Aussagen über das Streckenabtragen, über Winkel in Dreiecken und das Winkelantragen dürfen unbewiesen benutzt werden.
Lösung siehe Seite: 12.

Aufgabe EG25:

Zeigen Sie: Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent.
Hinweis: Sie dürfen die Möglichkeit des Streckenabtragens, die Addition von Streckenlängen und die Kongruenzsätze verwenden.
Lösung siehe Seite: 12.

Aufgabe EG26:

Beweisen Sie (a) den Höhensatz, (b) den Kathetensatz und (c) den Satz des Pythagoras mit Ähnlichkeitsüberlegungen, sowie (d) den Satz des Pythagoras mit Ergänzungs- oder Zerlegungsgleichheit.
Lösung siehe Seite: 12.

Aufgabe EG27:

Es sei K ein Körper. Beweisen Sie für die projektive Ebene $\mathrm{PG}(2,K)$ über diesem Körper die Aussagen:

(a) Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.

(b) Je zwei Geraden haben mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Lösung siehe Seite: 14.

Aufgabe EG28:

Gegeben sei ein Parallelogramm in der euklidischen Ebene. Beweisen Sie folgenden Sachverhalt: Die Summe der Quadrate der vier Seiten ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.
Vorschläge zur Bearbeitung dieser Aufgabe:
a) Führen Sie den Beweis mit ebenen Vektoren und interpretieren Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst als Quadrat seiner Länge.

b) Betrachten Sie ein Parallelogramm in der Gauß'schen Zahlenebene und interpretieren Sie den Betrag der Differenz zweier komplexer Zahlen als Abstand.
Lösung siehe Seite: 15.

Aufgabe EG29:

Man beweise mit Hilfe von Spiegelungen in der reellen euklidischen Ebene, dass sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.
Lösung siehe Seite: 16.

Aufgabe EG30:

Zeigen Sie: Die Menge der Drehungen um Z bildet bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.
Lösung siehe Seite: 16.

Aufgabe EG31:

(a) Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Symmetrieachsen für n-Ecke.

(b) Es sei $3 \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl $d(n)$ der Diagonalen eines konvexen n-Ecks.

Lösung siehe Seite: 17.

Aufgabe EG32:

Gegeben seien die positiven Längen p und q. Beschreiben Sie, wie man mit Zirkel und Lineal die Länge $\sqrt{pq}$ konstruieren kann. Benutzen Sie diese Methode, um zu einem Rechteck mit den Seitenlängen p und q ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren.
Beschreiben Sie dann, wie man mit Zirkel und Lineal ein zu einem Dreieck flächengleiches Quadrat konstruieren kann.
Wünschenswert ist die tatsächliche Ausführung der Konstruktion mit einem realen Zirkel und einem realen Lineal.
Lösung siehe Seite: 18.

Aufgabe EG33:

Zeigen Sie: Im 3-dimensionalen euklidischen Raum schneiden sich die vier räumlichen Diagonalen eines Quaders in einem Punkt.
Lösung siehe Seite: 19.

Aufgabe EG34:

In der Zeichenebene seien gegeben zwei nicht zusammenfallende nichtparallele Geraden a und b, deren Schnittpunkt S außerhalb der Zeichenebene liegt. Wie kann man allein mit dem Lineal die Verbindungsgerade eines im Zeichenblatt liegenden Punktes Q mit dem unzugänglichen Punkt S konstruieren?
Lösung siehe Seite: 19.

Aufgabe EG35:

Bestimmen Sie alle Symmetrieachsen folgender Figuren der euklidischen Ebene (mit Begründung):

(a) $F_1 = \overline{AB}$ (Strecke) für zwei Punkte A und B mit $A \neq B$.

(b) ein Quadrat.

(c) $F_2 = \sphericalangle(p,q)$ (Winkel) für zwei nicht-kollineare Halbgeraden p und q.

(d) $F_3 = g \cup h$ für zwei nichtparallele Geraden g und h, $g \neq h$.

(e) ein nichtquadratisches Rechteck.

Lösung siehe Seite: 20.

Aufgabe EG36:

In der reellen euklidischen Ebene konstruiere man (ohne Berechnung von Koordinaten) ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die Länge der einen Kathete b ist und für das Verhältnis von Hypothenusenlänge zur Länge der Hypothenusenhöhe gilt :

$$\frac{h_c}{c} = \frac{1}{3} .$$

Lösung siehe Seite: 21.

Aufgabe EG37:

Zeigen Sie, dass gegenüberliegende Winkel eines Vierecks der reellen euklidischen Ebene sich zu 180° ergänzen, falls die Seiten des Vierecks Sehnen eines Kreises sind, dessen Mittelpunkt im Innern des Vierecks liegt! (Spezialfall des Satzes vom Sehnenviereck).
Hinweis: Klassische Sätze der Euklidischen Geometrie dürfen ohne Beweis verwandt werden.
Lösung siehe Seite: 21.

Aufgabe EG38:

(a) Seien g und h Geraden der reellen euklidischen Ebene E, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen. Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte des Produkts

$$\tau = \gamma_h \circ \gamma_g$$

der Spiegelungen an den Geraden g und h ! (Fallunterscheidung!)

(Dabei darf die Tatsache, nach der unter (b) gefragt ist, nicht unbewiesen verwendet werden. Benutzen dürfen Sie jedoch Eigenschaften von Bewegungen, Strecken-Addition bzw. -Subtraktion und die dabei auftretenden Maße oder Eigenschaften von Produkten von drei Spiegelungen.)

(b) Um welchen Typ von Bewegung handelt es sich bei τ? (Ohne Beweis!)

Lösung siehe Seite: 21.

Lösungen

Lösungskizze zu Aufgabe EG21:

Jedes echte Dreieck ist durch drei nicht-kollineare Punkte festgelegt. Da durch drei Punkte eines Inzidenzraums genau eine Ebene führt, genügt es, den Beweis mit Betrachtungen in der Ebene zu führen.
Sei $A'B'C'$ ein weiteres Dreieck mit den Seiten a', b', c' und es sei $a = a'$, $b = b'$ und $\sphericalangle A'C'B'$ ist ein rechter Winkel. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $a'^2 + b'^2 = c'^2$. Also gilt auch $c^2 = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = c'^2$, woraus $c = c'$ folgt. Nach Kongruenzsatz SSS gilt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, also auch $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle A'C'B' = R$, ist auch $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG22:

> ***Der Höhensatz von Euklid:***
> *Sei A ein euklidischer Raum. Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck, h_c die Hypothenusenhöhe und seien p, q die beiden Hypothenusenabschnitte. Dann gilt*
> $$h_c^2 = p \cdot q \quad .$$

Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck. Sei o.B.d.A. $\sphericalangle ACB = R$. Die Höhe h_c teilt das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle FBC$. Da $\sphericalangle AFC = R$, gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$b^2 = q^2 + h_c^2.$$

Für die Hypothenusenabschnitte p und q des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt

$$p + q = c.$$

Nach dem Kathetensatz gilt

$$b^2 = c \cdot q.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & & q^2 + h_c^2 &= c \cdot q \\ \iff & & q^2 + h_c^2 &= (p+q) \cdot q \\ \iff & & h_c^2 &= p \cdot q. \end{aligned}$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG23:

"$\Longrightarrow$" Sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC \equiv BC$. Sei CD das Lot von C auf AB. Es gilt

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDC, \quad AC \equiv BC, \quad CD \equiv CD.$$

Nach Kongruenzsatz sSW folgt $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$. (Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist laenger als eine Kathete.) Damit wiederum folgt $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$. Also hat $\triangle ABC$ zwei kongruente Winkel.

“$\Longleftarrow$” Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$. Ferner sei CD das Lot von C auf AB. Dann gilt $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DAC$ und folglich auch $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCD$. Wegen $CD \equiv CD$ folgt nach Kongruenzsatz WSW die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BDC$. Insbesondere gilt $AC \equiv BC$. Also ist $\triangle ABC$ gleichschenklig. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG24:

Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, auf dessen Peripherie die Punkte A und B liegen. Der Definition des Kreises zufolge sind genau die Punkte P der Ebene Punkte der Kreisperipherie, für die $MP \equiv MA$ gilt, wobei der Kreis durch einen Punkt seiner Peripherie und den Mittelpunkt eindeutig und vollständig bestimmt ist.
Angenommen die Sekante AB schneidet die Kreisperipherie in einem weiteren Punkt C. B liege o.B.d.A zwischen A und C. Dann gilt $AM \equiv BM \equiv CM$. Da die Sekante eine Gerade ist, sind A, B und C kollinear.
Wir betrachten die Dreiecke $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ und $\triangle AMC$. Wegen $AM \equiv BM \equiv CM$ sind alle drei Dreiecke gleichschenklig. Es gilt also

$$\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ABM, \quad \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle CBM, \quad \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ACM.$$

Wegen $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle BCM$ folgt unmittelbar

$$\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle ABM.$$

Die Nebenwinkel $\sphericalangle ABM$ und $\sphericalangle CBM$ sind als kongruente Winkel rechte Winkel, so dass alle drei betrachteten Dreiecke jeweils zwei rechte Winkel hätten. Dies ist unmöglich, da die Summe aller drei Winkel eines Dreiecks gerade $2R$ ist. Also war die Annahme falsch; die Sekante schneidet AB schneidet die Kreisperipherie in keinem weiteren Punkt. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG25:

Es seien $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle FB'D$ kongruente Winkel. Wir tragen auf $B'F^+$ eine Strecke $B'A'$ mit $B'A' \equiv BA$ sowie auf $B'D^+$ eine Strecke $B'C'$ mit $B'C' \equiv BC$ ab. Nach Kongruenzsatz SWS sind dann die beiden Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ kongruent. Insbesondere sind auch die Seiten AC und $A'C'$ kongruent.
Nun tragen wir auf $\overline{BA}$ eine Strecke BX und auf $\overline{B'A'}$ eine Strecke $B'X'$ ab, so dass $BX \equiv B'X'$. Mit der Streckenaddition gilt dann $AX \equiv A'X'$. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gilt $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Nach Kongruenzsatz SWS sind auch die Dreiecke $\triangle AXC$ und $\triangle A'X'C'$ kongruent, also insbesondere auch $XC \equiv X'C'$. Insgesamt gelten nun die Kongruenzen $BX \equiv B'X'$, $BC \equiv B'C'$ und $CX \equiv C'X'$. Nach Kongruenzsatz SSS folgt die Kongruenz von $\triangle XCB$ und $\triangle X'C'B'$ und damit auch die Kongruenz von $\sphericalangle XBC$ und $\sphericalangle X'B'C'$. Also sind die Nebenwinkel der beiden kongruenten Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ ebenfalls kongruent. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG26:

Zu (a): Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Ferner sei h die Höhe von C auf AB mit Fußpunkt D, und seien $p = AD$ und $q = BD$.

Der Höhensatz von Euklid besagt, dass unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$h^2 = p \cdot q.$$

Da $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ACB$ (beides rechte Winkel) und $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle CBA$ (identische Winkel), ist das Dreieck $\triangle BCD$ nach Ähnlichkeitssatz WSW ähnlich zu $\triangle ABC$. Also existiert eine Ähnlichkeitsabbildung α mit folgenden Eigenschaften

$$\alpha(a) = c, \quad \alpha(h) = b, \quad \alpha(q) = a.$$

Da α längenverhältnistreu ist, folgt:

$$\frac{h}{q} = \frac{|\alpha(h)|}{|\alpha(q)|} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Analog zeigt man die Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und ABC und damit die Existenz einer Ähnlichkeitsabbildung β der folgenden Eigenschaften:

$$\beta(h) = a, \quad \beta(b) = c, \quad \beta(p) = b.$$

Da β längenverhältnistreu ist, folgt:

$$\frac{h}{p} = \frac{|\beta(h)|}{|\beta(p)|} = \frac{a}{b}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$\frac{h}{q} \overset{(1)}{=} \frac{b}{a} \overset{(2)}{=} \frac{p}{h},$$

und damit

$$h^2 = p \cdot q.$$

Zu (b): Der Kathetensatz besagt unter den gegebenen Voraussetzungen

$$b^2 = c \cdot p \quad \text{bzw.} \quad a^2 = c \cdot q.$$

Nach Teil (a) sind die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ABC$ ähnlich. Also gilt Gleichung (2)

$$\frac{h}{p} = \frac{a}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{a}{h} \cdot p.$$

Ebenfalls nach Teil (a) sind die Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle ABC$ ähnlich. Also gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung α mit $\alpha(a) = c$ und $\alpha(h) = b$. Wegen der Längenverhältnistreue von α folgt $\frac{a}{h} = \frac{c}{b}$. Insgesamt folgt nun

$$b = \frac{a}{h} \cdot p = \frac{c}{b} \cdot p \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 = c \cdot p.$$

Der Fall $a^2 = c \cdot q$ wird analog gezeigt.

Zu (c): Nach Teil (b) gilt $a^2 = c \cdot q$ sowie $b^2 = c \cdot p$. Also folgt

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p+q) = c^2. \quad \square$$

Zu (d): Zwei Polygonflächen, die in paarweise kongruente Figuren zerlegt werden können, heißen zerlegungsgleich. Zwei Polygonflächen, die durch Hinzufügen paarweise kongruenter Figuren zu kongruenten Figuren ergänzt werden können, heißen ergänzungsgleich. Zwei zerlegungsgleiche bzw. ergänzungsgleiche Figuren haben jeweils denselben Flächeninhalt.

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit den Seiten $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ und der Seitenlänge $|AB| = m$. Sei X ein innerer Punkt auf der Strecke AB. Wir nehmen die Strecke AX mit $a = |AX| < m$ in den Zirkel und teilen die vier Seiten des Quadrats jeweils im gleichen Verhältnis in zwei Teilstrecken AX und XB mit den Längen $|AX| = a$ und $|XB| = b = m - a$. Die so entstehenden Trennungspunkte X, X', X'', X''' auf den Seiten des Quadrats verbinden wir zyklisch miteinander und erhalten so vier Dreiecke $\triangle AXX''', \triangle BX'X, \triangle CX''X', \triangle DX'''X''$. Es gilt

$$AX \equiv BX' \equiv CX'' \equiv DX''' \quad \text{sowie} \quad XB \equiv X'C \equiv X''D \equiv X'''A.$$

Da $ABCD$ ein Quadrat ist gilt weiterhin

$$\sphericalangle X'''AX \equiv \sphericalangle XBX' \equiv \sphericalangle X'CX'' \equiv \sphericalangle X''DX''' \equiv R.$$

Aus Kongruenzsatz SWS folgt damit die paarweise Kongruenz aller vier Dreiecke. Insbesondere gilt $XX' \equiv X'X'' \equiv X''X''' \equiv X'''X$ mit $|XX'| =: c$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AXX'''$ ist $\frac{ab}{2}$, der Flächeninhalt des einbeschriebenen Quadrats $XX'X''X'''$ ist c^2.

Zerlegen wir nun das Quadrat $ABCD$ wie beschrieben in die kongruenten Dreiecke und das innere Quadrat, so folgt für die Fläche des Quadrats $ABCD$

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2. \tag{3}$$

Nach der ersten binomischen Formel gilt aber auch

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{4}$$

Insgesamt folgt nun durch Gleichsetzen von (3) und (3)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe EG27:

Die projektive Ebene $\mathrm{PG}(2,K)$ besteht aus der Menge der 1-dimensionalen Unterräume von K^3 als Punkte und der Menge der 2-dimensionalen Unterräume von K^3 als Geraden. Die Inzidenz zwischen Punkten und Geraden ist durch die Teilmengenrelation erklärt.

Zu (a): Sei g eine Gerade, d.h. für geeignete linear unabhängige $\vec{a}, \vec{b} \in K^3$ sei $g = K\vec{a} + K\vec{b}$. Dann liegen insbesondere die Punkte $P = K\vec{a}, Q = K\vec{b}$ und $R = K(\vec{a} + \vec{b})$ auf g. Weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ voneinander linear unabhängig sind, sind es auch $\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$, sowie $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$. Also sind die Punkte P, Q, R paarweise voneinander verschieden.

Zu (b): Es seien g, h zwei Geraden, d.h. für geeignete linear unabhängige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in K^3$ sei $g = K\vec{a} + K\vec{b}$ und $h = K\vec{c} + K\vec{d}$. Im K^3 werden g und h durch zweidimensionale Unterräume repräsentiert. Diese fallen entweder zusammen (wenn $g = h$), oder sie sind voneinander verschieden. In diesem Fall gilt für g und h

$$3 = \dim K = \dim g + \dim h - \dim(g \cap h) = 2 + 2 - \dim(g \cap h).$$

Daraus folgt $\dim(g \cap h) = 1$, was bedeutet, dass sich g und h in mindestens einem Punkt schneiden, der einem 1-dimensionalen Unterraum von K^3 entspricht. In beiden Fällen ist damit $g \cap h$ nicht leer. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG28:

Zu (a): Es gilt für das Skalarprodukt $< \vec{v}, \vec{w} >$ zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ die Beziehung

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha,$$

wobei $|\vec{v}|$ und $|\vec{w}|$ die Länge der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und α den Winkel zwischen den beiden Vektoren bezeichnet. Für $\vec{v} = \vec{w}$ ist $\alpha = 0$ und damit

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2.$$

Da $|\vec{v}|^2 \geq 0$, können wir mit $|\vec{v}| = v$ auch abkürzend schreiben

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v^2.$$

Wir können also das Quadrat über einer Seite z des Parallelogramms identifizieren mit dem Skalarprodukt $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle$, wobei $\vec{z}$ der Vektor ist, der die Seite z im $\mathbb{R}^2$ repräsentiert.

Gegeben ist eine euklidische Ebene. Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Eine Bilinearform s erfüllt die beiden Eigenschaften

$$s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w), \qquad (*)$$

$$s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2). \qquad (**)$$

Betrachten wir ein Parallelogramm, welches durch die l.u. Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben ist, so erhalten wir für die Diagonalen die Beziehungen $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b}$. Zu zeigen ist

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

$$\begin{aligned}
e^2 + f^2 &= |\vec{e}|^2 + |\vec{f}|^2 \\
&= |\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\
&= \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \\
&\overset{(*)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \\
&\overset{(**)}{=} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + \\
&\quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
&= 2\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
&= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 \\
&= 2a^2 + 2b^2.
\end{aligned}$$

Zu (b): Sind a und b komplexe Zahlen, so ist $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$. Man kann dies elegant beweisen mittels $|z|^2=z\overline{z}$ und Ausrechnen. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe EG29:

Sei $\triangle ABC$ ein echtes Dreieck, w_a und w_b seien die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$. w_a und w_b sind nicht identisch, da sonst C auf AB liegen würde und somit $\triangle ABC$ kein echtes Dreieck wäre. w_a und w_b können auch nicht parallel sein; anderenfalls läge w_b in einer Halbebene mit dem Rand w_a und könnte nicht die Seite AC schneiden.
Sei nun $M=w_a\cap w_b$ und h das Lot von M auf AB. Da h,w_a und w_b sich im Punkt M schneiden, folgt aus dem Dreispiegelungssatz, dass $\gamma_{w_a}\circ\gamma_h\circ\gamma_{w_b}=\gamma_g$ für eine geeignete Gerade g mit $M\in g$, wobei z.B. γ_h die Spiegelung an der Geraden h bezeichnet.
Da w_a und w_b Winkelhalbierende sind, gilt für die Geradenspiegelungen an w_a bzw. w_b

$$\gamma_{w_a}(\overline{AC})=\overline{AB},\quad \gamma_{w_a}(\overline{AB})=\overline{AC},$$

$$\gamma_{w_b}(\overline{AB})=\overline{BC},\quad \gamma_{w_b}(\overline{BC})=\overline{AB}.$$

Da h als Lot von M auf AB senkrecht auf AB steht, bleibt $\overline{AB}$ unter der Spiegelung γ_h fest (wenn auch nicht punktweise). Damit gilt für das Produkt der drei Geradenspiegelungen:

$$\gamma_g(\overline{BC})=(\gamma_{w_a}\circ\gamma_h\circ\gamma_{w_b})(\overline{BC})=\gamma_{w_a}(\gamma_h(\gamma_{w_b}(\overline{BC})))=\gamma_{w_a}(\gamma_h(\overline{AB})=\gamma_{w_a}(\overline{AB})=\overline{AC}.$$

Wegen $\gamma_g(\overline{BC})=\overline{AC})$, muß g Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ sein. Also schneiden sich die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks im Punkt M. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe EG30:

Es sei D_Z die Menge der Drehungen um Z. Die Elemente von D_Z seien mit δ_i für $i\in\{1,2,\dots\}$ bezeichnet. Zu zeigen ist nun:

(i) $\delta_1,\delta_2\in D_Z\Longrightarrow\delta_1\circ\delta_2\in D_Z$ (Abgeschlossenheit bzgl. der Hintereinanderausführung)

(ii) $(\delta_1\circ\delta_2)\circ\delta_3=\delta_1\circ(\delta_2\circ\delta_3$ (Assoziativität)

(iii) $\delta_1\in D_Z\Longrightarrow\delta_1^{-1}\in D_Z$ (Existenz des inversen Elements)

(iv) (Existenz des neutralen Elements)

Zu (i): Jede Drehung um Z lässt sich als Produkt zweier Geradenspiegelungen darstellen, deren Achsen sich in Z schneiden. Insbesondere ist Z dann Fixpunkt des Produkts der Geradenspiegelungen. Umgekehrt entspricht jedes Produkt von Spiegelungen an zwei (nicht parallelen) Geraden einer Drehung um ihren Schnittpunkt.

Sei $\delta_1\in D_Z$ mit $\delta_1=\gamma_g\circ\gamma_h$ und $g\cap h=\{Z\}$ sowie $\delta_2\in D_Z$ mit $\delta_2=\gamma_k\circ\gamma_l$ und $k\cap l=\{Z\}$. Dann gilt

$$\delta_1\circ\delta_2=(\gamma_g\circ\gamma_h)\circ(\gamma_k\circ\gamma_l)=(\gamma_g\circ\gamma_h\circ\gamma_k)\circ\gamma_l.$$

Nach dem Dreispiegelungssatz ist jedes Produkt von drei Geradenspiegelungen, deren Achsen sich in einem Punkt schneiden, wieder eine Geradenspiegelung, deren Achse durch den Schnittpunkt geht. Daher folgt

$$\gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_k = \gamma_m \text{ mit } Z \in m.$$

Insgesamt bekommen wir damit

$$\delta_1 \circ \delta_2 = (\gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_k) \circ \gamma_l = \gamma_m \circ \gamma_l \text{ mit } m \cap l = \{Z\}.$$

Also ist $\delta_1 \circ \delta_2 \in D_Z$.

Zu (ii): Das Assoziativgesetz gilt für alle Abbildungen, deren Komposition definiert ist. Da Geradenspiegelungen bijektiv sind, ist auch das Produkt zweier Geradenspiegelungen bijektiv. Also ist das Produkt zweier Drehungen in der Ebene definiert.

Zu (iii): Sei $\delta_1 = \gamma_g \circ \gamma_h$ mit $g \cap h = \{Z\}$. Wegen $\gamma_g^{-1} = \gamma_g$ und $\gamma_h^{-1} = \gamma_h$ gilt

$$\begin{aligned} \delta_1 = \gamma_g \circ \gamma_h &\Longleftrightarrow \gamma_g^{-1} \circ \delta_1 = \gamma_h \\ &\Longleftrightarrow \gamma_h^{-1} \circ \gamma_g^{-1} \circ \delta_1 = \mathrm{id} \\ &\Longleftrightarrow \gamma_h^{-1} \circ \gamma_g^{-1} = \delta_1^{-1}. \end{aligned}$$

δ_1^{-1} existiert also und wegen $g \cap h = \{Z\}$ ist $\delta_1^{-1} \in D_Z$.

Zu (iv): Als neutrales Element wähle man die Identität, die insbesondere auch als Nulldrehung um Z aufgefasst werden kann. □

Lösungskizze zu Aufgabe EG31:

Zu (a): Für nicht-regelmäßige n-Ecke ist im allgemeinen keine weitere Aussage möglich, als dass die maximale Anzahl von Symmetrieachsen hier nicht erreicht werden dürfte. Jede Symmetrie trägt bei zur Regelmäßigkeit. Wir betrachten daher regelmäßige n-Ecke. Eine Gerade g ist genau dann Symmetrieachse eines regelmäßigen n-Ecks, wenn die Spiegelung an g eine Deckabbildung des n-Ecks ist. Es seien $E_1, E_2, \dots, E_n$ die Ecken des regelmäßigen n-Ecks und M dessen Mittelpunkt. Dieser existiert, da die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt als Mittelpunkt des n-Ecks definiert werden kann. Insbesondere muß bei einer Deckspiegelung des n-Ecks M fix bleiben, woraus folgt, dass jede Symmetrieachse durch M führen muß. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) n ist gerade.

Dann sind $E_1E_{1+\frac{n}{2}}, E_2E_{2+\frac{n}{2}}, \dots, E_{\frac{n}{2}}E_n$ Symmetrieachsen des n-Ecks. Dies sind genau $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen. Ferner erhält man $\frac{n}{2}$ Symmetrieachsen, wenn man die Geraden durch die Mittelpunkte der Kanten zweier benachbarter Ecken und den Mittelpunkt des n-Ecks betrachtet. Weitere Symmetrieachsen gibt es nicht, da die n Eckpunkte durch eine Spiegelung an einer Symmetrieachse entweder fix bleiben oder auf eine der $n-1$ anderen Ecken des n-Ecks abgebildet werden müssen. Für gerades n hat ein n-Eck damit genau n Symmetrieachsen.

(ii) n ist ungerade.

Auch in diesem Fall gibt es n Symmetrieachsen. Wir betrachten eine davon exemplarisch. Sei g eine Gerade durch die Ecke E_1 und M. Dann schneidet g keinen weiteren Eckpunkt des n-Ecks, sondern geht durch den Mittelpunkt der Kante zwischen zwei anderen Ecken des n-Ecks und verletzt daher nicht die Forderung nach einer Deckabbildung. g ist somit Symmetrieachse durch die Ecke E_1. Mit der Anzahl der Ecken des n-Ecks bekommen wir nun die Anzahl der Symmetrieachsen.

Zu (b): Jede Ecke schickt in einem konvexen n-Eck an alle anderen Ecken außer an sich selbst und an ihre beiden Nachbarn eine Diagonale aus, was pro Ecke $n-3$ Diagonalen ergibt. Zählt man die Diagonalen an allen n Ecken zusammen, kommt man auf $n(n-3)$ Diagonalen. Da jede Diagonale genau zwei Ecken verbindet, zählt man daher auf diese Weise jede Diagonale genau zweimal, weshalb für die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Ecks gilt:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

□

Lösungsskizze zu Aufgabe EG32:

Die Beweisidee ist die, dass man die Seiten des gegebenen Rechtecks als Hypothenusenabschnitte p und q in einem rechtwinkligen Dreieck auffasst. Bekanntermaßen gilt nach dem Höhensatz dann $h_c^2 = pq$, d.h. das Quadrat über der Höhe h_c ist flächengleich zum Rechteck mit den Seiten p und q.
Gegeben sei also ein Rechteck mit den Seitenlängen $|ST| = p$ und $|BS| = q$. Wir verlängern die Strecke BS über S hinaus und tragen auf der Halbgeraden BS^+ am Punkt S die Länge p mit dem Zirkel ab. Der gewonnene Punkt heiße A, d.h. also $|AS| = p$.
Nun konstruieren wir den Mittelpunkt M der Strecke AB, indem wir jeweils um A und um B einen Kreis mit dem Radius AB schlagen. Die beiden entstehenden Schnittpunkte der Kreise verbinden wir durch eine Gerade g_1. Der Schnittpunkt von g_1 mit AB ist der gesuchte Mittelpunkt M der Strecke AB.
Es gilt $AM \equiv BM$. Schlagen wir nun mit dem Zirkel eine Halbkreis K mit Mittelpunkt M und Radius AM über die Strecke AB, so liegen A und B auf dem Halbkreis K. Nach dem Satz des Thales gilt $\sphericalangle AC'B = R$ für alle Punkte C', die auf K liegen und ungleich A oder B sind. Gesucht ist nun eine auf AB senkrecht stehende Gerade g_2 durch S. Diese schneidet K in einem Punkt C, der dann zusammen mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe CS bildet.
Wir konstruieren g_2, indem wir einen Hilfspunkt S' benutzen. Wir tragen auf der Halbgeraden SB^+ an S die Strecke AS ab und bekommen den Punkt S'. Es gilt $AS \equiv SS'$, d.h. S ist Mittelpunkt der Strecke AS'. Nun konstruieren wir analog zur Konstruktion der Mittelsenkrechten auf AB die Mittelsenkrechte g_2 auf AS', die durch S verläuft und auf AB senkrecht steht. Sei C der Schnittpunkt von g_2 und K.
Nun ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Höhe CS und Hypothenusenabschnitte AS und SB. Mit $h_c = |CS|$, $p = |AS|$ und $q = |SB|$ folgt nun aus dem Höhensatz $h_c = \sqrt{pq}$.
Gegeben sei nun ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Grundseite c und Grundseitenhöhe h_c. Die Fläche dieses Dreiecks ist dann $A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c}{2} \cdot h_c$. Gesucht ist nun ein Quadrat mit Fläche A, d.h. mit Kantenlänge $\sqrt{\frac{c}{2} \cdot h_c}$. Die Länge $\frac{c}{2}$ kann bestimmt werden, indem

man die Mittelsenkrechte auf c konstruiert. Anschließend kann man mit den nunmehr konstruierbaren Längen $\frac{c}{2}$ und h_c ein Rechteck mit Seitenlängen $\frac{c}{2}$ und h_c konstruieren. Wie zu Beginn der Aufgabe kann ausgehend von diesem Rechteck analog ein Quadrat mit Kantenlänge $\sqrt{\frac{c}{2} \cdot h_c}$ konstruiert werden. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG33:

Sei Q ein Quader mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Nach Definition eines Quaders sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang. Je zwei sich schneidende Seiten stehen senkrecht aufeinander.
Wir betrachten die beiden Dreiecke $\triangle AA'D'$ und $\triangle BCC'$. Nach Definition eines Quaders gilt zunächst $BC \equiv A'D$ sowie $AA' \equiv CC'$. Außerdem gilt $\sphericalangle AA'D' \equiv \sphericalangle BCC' \equiv R$. Aus Kongruenzsatz SWS folgt nun $\triangle AA'D' \equiv \triangle BCC'$. Aus der Konstruktion des Quaders folgt weiterhin, dass die beiden Dreicke parallel zueinander im Raum liegen.
Betrachten wir nun die drei Geraden $a := \overline{AC'}$, $b := \overline{BD'}$ und $c := \overline{A'C}$, so folgt aus dem Satz von Desargues des räumlichen Falls, dass entweder $a||b||c$, oder dass sich die drei Geraden in einem gemeinsamen Punkt Z schneiden. Wir müssen also ausschließen, dass sie parallel sind und haben somit die Existenz eines gemeinsamen Schnittpunkts der drei Diagonalen des Quaders.
Analog könnten wir auch die beiden Dreiecke $\triangle ADD'$ und $\triangle BB'C'$ betrachten. Nach Definition eines Quaders gilt $B'C' \equiv AD$, $BB' \equiv DD'$ sowie $\sphericalangle ADD' \equiv \sphericalangle BB'C \equiv R$. Aus Kongruenzsatz SWS folgt nun $\triangle ADD' \equiv \triangle BB'C'$. Aus der Konstruktion des Quaders folgt weiterhin, dass die beiden Dreicke parallel zueinander im Raum liegen.
Betrachten wir nun die drei Geraden $a := \overline{AC'}$, $b := \overline{BD'}$ und $d := \overline{B'D}$, so folgt wiederum aus dem Satz von Desargues des räumlichen Falls, dass entweder $a||b||d$, oder dass sich die drei Geraden in einem gemeinsamen Punkt Z schneiden.
Wir wollen nun zeigen, dass je zwei Diagonalen des Quaders sich in einem Punkt schneiden, mithin also nicht parallel sind. Dazu betrachten wir beispielsweise die Fläche $ABC'D'$ (siehe Skizze).
Nach Definition des Quaders gilt $AB||C'D'$ sowie $AA'DD'||BB'CC'$. Zwei Geraden, die in zwei zueinander parallelen Ebenen liegen, sind ebenfalls zueinander parallel. Also gilt $AD'||BC'$ und wir bekommen die Erkenntnis, dass $ABC'D'$ ein Parallelogramm ist. Nun verwenden wir den Satz, dass sich die Diagonalen eines Parallelogramms in einem Punkt schneiden und bekommen so einen Schnittpunkt Z mit $Z = AC' \cap BD' = a \cap b$. Analog kommt man durch Betrachtung der Ebenen $A'BCD'$ bzw. $A'B'CD$ bzw. $AB'C'D$ auf $Z' = b \cap c$ bzw. $Z'' = c \cap d$ bzw. $Z''' = d \cap a$. Aufgrund der paarweisen Existenz des Schnittpunkts der Raumdiagonalen a, b, c, d und der zu Beginn vorgenommenen Betrachtung folgt nun: Die Raumdiagonalen eines Quaders schneiden sich in einem Punkt. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG34:

Gegeben ist folgende Ausgangssituation:
Eine Zeichenebene mit den zwei nichtparallelen Geraden a und b, deren Schnittpunkt S außerhalb der Zeichenebene liegt, sowie ein Punkt Q, der auf keiner dieser beiden Geraden liegt.
Wir zeichnen zwei nichtparallele Geraden c und d, die a und b schneiden. Der Schnittpunkt von c und d heiße P. Den Schnittpunkt der Geraden c mit a (bzw. b) nennen wir

A' (bzw. A).
Man zeichne die durch A' und Q gehende Gerade, den Schnittpunkt mit b nenne man C, derjenige mit d heiße B'.
Nun zeichne man die Gerade $\overline{AQ}$, deren Schnittpunkt mit d nennt man B.
Zeichne $\overline{BC}$, sowie $\overline{PC}$.
Den Schnittpunkt von $\overline{PC}$ mit a nennen wir C'.
Zeichne $\overline{B'C'}$ und mit O sei der Schnittpunkt mit $\overline{BC}$ bezeichnet.
Nun zeichne die Gerade $\overline{QO}$. Sie ist nach dem Satz von Desargues die gesuchte Verbindungsgerade von Punkt Q mit dem unzugänglichen Punkt S. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe EG35:

Eine Symmetrieachse einer Figur F ist die Fixgerade einer Geradenspiegelung, die F auf sich selbst abbildet.

Zu (a): Es gibt genau eine Geradenspiegelung γ_g, die die Punkte A und B als Fixpunkte hat; deren Fixgerade ist die Gerade $\overline{AB}$, so dass $\gamma_g(\overline{AB}) = \overline{AB}$ gilt.

Ebenso gibt es genau eine Geradenspiegelung, die A auf B abbildet. In diesem Fall ist die Spiegelachse g senkrecht zu AB, und für den Schnittpunkt $M = g \cap AB$ gilt $AM \equiv MB \equiv M\gamma_g(B)$.

F_1 hat damit als Symmetrieachsen die Gerade $\overline{AB}$ und die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Zu (b): Die einzigen Symmetrieachsen eines Quadrats $ABCD$ sind die Mittelsenkrechten zu je einem Paar von gegenüberliegenden Seiten sowie die Diagonalen des Quadrats.

Die Diagonalen $d_1 = AC$ und $d_2 = BD$ schneiden sich im Mittelpunkt M des Quadrats. γ_{d_1} erfüllt wegen $MA \equiv MC$ die Bedingung $\gamma_{d_1}(D) = B$ und $\gamma_{d_1}(B) = D$, A und C bleiben unter γ_{d_1} fest. γ_{d_2} erfüllt wegen $MB \equiv MD$ die Bedingungen $\gamma_{d_2}(A) = C$ und $\gamma_{d_2}(C) = A$, B und D bleiben unter γ_{d_2} fest.

Zu (c): $X := p \cap q$ muß Fixpunkt jeder Deckabbildung von F_2 sein. Daher muß jede Symmetrieachse von F_2 den Punkt X enthalten. Genau dann, wenn w_α die Winkelhalbierende von $F_2 = \sphericalangle(p,q)$ ist, gilt

$$\gamma_{w_\alpha}(p) = q \quad \text{sowie} \quad \gamma_{w_\alpha}(q) = p.$$

Da $X \in w_\alpha$, ist w_α die einzige Symmetrieachse von F_2.

Zu (d): Sei $F_3 = g \cup h$, wobei g und h nicht parallel und nicht senkrecht zueinander sind. Sei $g \cap h =: S$ sowie $g = AC$ und $h = BD$, wobei S zwischen A und C und zwischen B und D liegen soll.

g und h sind selbst keine Symmetrieachsen, da $g \not\perp h$. Wegen der Kongruenz von Scheitelwinkeln kann F_3 analog zu F_2 betrachtet werden; man erhält allerdings zwei Symmetrieachsen, weil zwei Winkelhalbierende zu zwei verschiedenen Winkeln existieren. Die beiden einzigen Symmetrieachsen sind daher die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ASB$ und von $\sphericalangle BSC$. Als Deckabbildungen dienen die Geradenspiegelungen an diesen Winkelhalbierenden.

Zu (e): Die einzigen Symmetrieachsen eines echten Rechtecks sind die beiden Mittelsenkrechten zu je einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe EG36:

Man wählt eine beliebige Strecke $\overline{AB'}$ der Länge c', konstruiert über ihr den Thaleskreis und schneidet diesen mit einer Parallelen zu AB' im Abstand $\frac{1}{3}c'$ von AB'. Einer der Schnittpunkte sei C' und die Länge der Strecke $\overline{B'C'}$ sei b'. Durch zentrische Streckung mit Streckungsfaktor b/b' (und z.Bsp. Zentrum A) geht das Dreieck $\Delta AB'C'$ in ein Dreieck ΔABC über, das die geforderten Eigenschaften hat. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe EG37:

Verbindet man den Mittelpunkt des Kreises mit den Ecken des Vierecks, so entstehen vier gleichschenklige Dreiecke; deren Basiswinkel sind jeweils kongruent, haben also gleiches Maß.
—-Skizze—-
Es folgt

$$360^\circ = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = 4 \cdot 180^\circ - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma - 2\delta, \text{ also } (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ.$$

Daraus folgt die Behauptung durch Winkeladdition. $\square$

Anmerkung

Hieraus folgt leicht der Peripheriewinkelsatz (Umfangswinkelsatz). Eine analoge Argumentation zeigt den Zentriwinkelsatz (Mittelpunktswinkelsatz).

Lösungsskizze zu Aufgabe EG38:

(a) Sei P Fixpunkt von $\tau = \gamma_h \cdot \gamma_g$, gelte also $(\gamma_h \cdot \gamma_g)(P) = P$ und daher $\gamma_g(P) = \gamma_h(P) =: P'$.

Da $g \perp k \perp h$ ist, folgt $g \parallel h$. Der (eindeutig bestimmte) Mittelpunkt M von P und P' muss dann auf g und auf h liegen; wegen $g \parallel h$ ist $g = h$ und damit $\tau = (\gamma_h \cdot \gamma_g) = \mathrm{id}$.

Daher ist die Menge der Fixpunkte entweder die leere Menge (im Fall $g \neq h$) oder die Menge aller Punkte von E (für $g = h$).

Anmerkung. Alternativ kann man im Fall $g \neq h$ wie folgt argumentieren:

Sei P' der Bildpunkt eines Punktes P unter γ_g und sei $P'' := \gamma_h(P')$. Ist G der Fußpunkt des Lotes von P auf g und H der Fußpunkt des Lotes von P' auf h, so bezeichne τ_1 die Translation mit $\tau_1(P) = G$ und τ_2 die Translation mit $\tau_2(P') = H$; setzt man $\tau := \tau_2 \circ \tau_1$, so folgt aus der Kommutativität der Gruppe der Translationen

$$\tau^2(P) = \tau_1 \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_2(P) = P''.$$

Da die Richtung von τ senkrecht zu g und h ist, und da wegen $\tau(G) = \tau_2(P') = H$ auch $\tau(g) = h$ gilt, ist τ unabhängig von der Wahl von P. Daher ist $\gamma_h \cdot \gamma_g$ gleich τ^2 und damit eine Translation. Eine Translation hat aber alle Punkte als Fixpunkte oder keinen Fixpunkt.

Eine weiterer alternativer Beweis ist der folgende:

Sind H_1 und H_2 die Halbebenen mit Randgerade g und H_3 und H_4 die Halbebenen zu h , dann kann (bei geeigneter Nummerierung) P nicht in $H_2 \cap H_3$ liegen (denn dann wären $\gamma_h(P) \in H_4$ und $\gamma_g(P) \in H_1$).

Also sei o.B.d.A. $P \in H_1$ (wegen der Symmetrie in g, h). Es folgt $\gamma_h \circ \gamma_g(P) = P = \gamma_g \circ \gamma_h(P)$ und $\gamma_g(P) = \gamma_h(P) \in H_4$. Ist d der Abstand zwischen g und h, so ist der Abstand von P zu h um d größer als der Abstand von P zu g: der Abstand von $\gamma_g(P)$ von h ist gleich $x + d$, der von $\gamma_g(P)$ von g gleich x, insgesamt $2d + x = x$, woraus $d = 0$ folgte und der 1. Fall vorläge.

(b) Es handelt sich um eine Translation um den Vektor $2\,\vec{GH}$ (für $G \in g, H \in h$ und $GH \perp g$). $\square$

Themenindex