Seminar über Algorithmen
Bestimmung des Fréchet-Abstands

Sebastian Kürten 15. Juni 2012

1 Einleitung

- Der Fréchet-Abstand ist ein Ähnlichkeitsmaß für Kurven
- Quantifizieren des Abstands zweier gegebener Kurven f und g
- Es gibt verschiedene Kriterien dafür, der Fréchet-Abstand ist eines davon
- Anderes Maß: Hausdorff-Abstand:

  $$\delta_H = max\big(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\big)$$

  wobei

  $$A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

- Betrachtet nur die Punktmengen, nicht den Verlauf der Kurven
- Der Fréchet-Abstand bezieht den Verlauf mit ein
- Kommt dem intuitiven Verständnis von Ähnlichkeit näher

2 Geschichte / Literatur

- Benannt nach Maurice René Fréchet, welcher den Fréchet-Abstand in einer Veröffentlichung von 1906 behandelt.
- Französischer Mathematiker, Schüler von Hadamard
- Helmut Alt und Michael Godau: *Computing the Fréchet distance between two polygonal curves*

3 Der Fréchet-Abstand

- Intuitives Verständnis: Der Mann mit dem Hund: beide bewegen sich auf vorgegebenen Wegen und dürfen die Geschwindigkeit variieren und auch stehenbleiben, nicht aber rückwärts gehen $\rightarrow$ die kürzeste mögliche Hundeleine entspricht dem Fréchet-Abstand.
- **Definition 1 (Kurve)** *V: euklidischer Vektorraum, z.B. $\mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$*

  Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow V$
- **Definition 2 (Parametrisierung)** *Sei $f : [a, b] \rightarrow V$ eine Kurve, dann ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ eine Parametrisierung für die Kurve.*

- **Definition 3 (Fréchet-Abstand)** *Seien* $f : [a, a'] \to V$*,* $g : [b, b'] \to V$ *Kurven, dann ist der Fréchet-Abstand* δ_F *definiert als:*

$$\delta_F(f, g) = \inf_{\substack{\alpha:[0,1]\to[a,a'] \\ \beta:[0,1]\to[b,b']}} \max_{t\in[0,1]} \|f(\alpha(t)) - g(\beta(t))\|$$

- Obige Definition gilt allgemein für Kurven
- Wir befassen uns im weiteren mit dem Spezialfall der Polygonzüge
- **Definition 4 (Polygonzug)** *Ein Polygonzug ist eine Kurve* $P : [0, n] \to V$ *mit* $n \in \mathbb{N}$*, wobei:* $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*:* $P_{|[i,i+1]}$ *ist linear.*
- n heißt die Länge von P

4 Bestimmung des Fréchet-Abstands

- Wie bestimmt man den Fréchet-Abstand für zwei gegebene Polygonzüge P und Q?
- Die Länge von P sei p, die Länge von Q sei q.
- Vorgehensweise:
  - Wir lösen das Entscheidungsproblem $\delta_F(P, Q) \leq \epsilon$
  - **Algorithmus 1** *Wenn wir eine obere und eine untere Schranke für* δ_F *kennen, dann können wir in diesem Intervall binär suchen und uns immer näher an die Lösung herantasten. In jedem Schritt wird dann das Entscheidungsproblem für ein festes* ϵ *gelöst um zu entscheiden, in welchem Teilintervall die Lösung liegt. Mit dieser Methode können wir k Bits der Lösung in* $\mathcal{O}(k)$ *Iterationen berechnen.*
  - **Algorithmus 2** *Es zeigt sich, dass* δ_F *gar nicht beliebige Werte annehmen kann, sondern dass es eine endliche Menge von kritischen Werten gibt, die für* δ_F *in Frage kommen. Wenn wir diese kritischen Werte ermitteln, können wir diese sortieren und die binäre Suche auf diese Werte beschränken. Damit erhalten wir eine exakte Lösung.*
- Welche Laufzeiten erzielen wir?
  - Entscheidungsproblem: $\mathcal{O}(p \cdot q)$
  - Algorithmus 1: $\mathcal{O}(k \cdot p \cdot q)$ für k Bits der Lösung
  - Algorithmus 2: $\mathcal{O}((p^2 \cdot q + p \cdot q^2) \log(p \cdot q))$ für die exakte Lösung

5 Das Entscheidungsproblem

- Fragestellung: $\delta_F(P, Q) \leq \epsilon$?
- Wir betrachten hierzu den sogenannten *Free Space*. Man stellt diesen in *Free Space Diagrammen* dar.
- Ein Free Space-Diagramm beschreibt die Menge von Parametern (s, t) für die Kurven P und Q.
- Ein Punkt auf dem Diagramm entspricht einem Parametertupel (s, t). Diesem sind zwei Punkte in V zugeordnet, nämlich $P(s)$ und $Q(t)$. Das Diagramm zeigt an, ob die beiden Punkte einen Abstand $\leq \epsilon$ haben.

- Wir definieren den Free Space F_ϵ zunächst für Polygonzüge der Länge 1, also für Strecken:

  Definition 5 (Free Space für Strecken)

  $$F_\epsilon = \{(s,t) \in [0,1]^2 \mid d(P(s), Q(t)) \leq \epsilon\}$$

- Man erweitert diese Definition auf beliebige Polygonzüge. Das Diagramm ist dann im Bereich $[0,p] \times [0,q]$ definiert:

  Definition 6 (Free Space für Polygonzüge)

  $$F_\epsilon = \{(s,t) \in [0,p] \times [0,q] \mid d(P(s), Q(t)) \leq \epsilon\}$$

- Dieses Diagramm besteht aus $p \cdot q$ Zellen $C_{ij} = [i-1, i] \times [j-1, j]$.

- In jeder Zelle C_{ij} entspricht der Free Space $F_\epsilon \cap C_{ij}$ dem Free Space nach Definition 5 für die Strecken $\overline{P(i-1)P(i)}$ und $\overline{Q(j-1)Q(j)}$.

- Wir können die Antwort des Entscheidungsproblems am Diagramm ablesen: Es gilt $\delta_F(P,Q) \leq \epsilon$ gdw. es im Diagramm eine Kurve von $(0,0)$ nach (p,q) gibt, die in beiden Variablen monoton ist.

- Die Kurve durchs Diagramm zeigt uns geeignete Parametrisierungen α und β an, mit denen P und Q simultan durchlaufen werden können ohne den Abstand zwischen den beiden Positionen zu irgendeiner Zeit größer als ϵ werden zu lassen.

- Wie „lesen“ wir algorithmisch ab, ob es eine solche Kurve gibt?

- Betrachten eine Teilemenge von F_ϵ, den sogenannten *Reachable Space* R_ϵ. Dieser beschreibt als Teilmenge des Free Space auch eine Menge von Parametertupeln. Es gilt $(s,t) \in R_\epsilon$, wenn es möglich ist, den Punkt (s,t) von $(0,0)$ aus mit einer monotonen Kurve zu erreichen.

- Es gilt $\delta_F(P,Q) \leq \epsilon$ gdw. $(p,q) \in R_\epsilon$.

- Wir betrachten den Schnitt von R_ϵ mit den Gitterkanten im Diagramm

- Wenn wir den Reachable Space auf den Kanten von C_{pq} betrachten, können wir sehen, ob (p,q) im Reachable Space liegt.

- Vorgehensweise:
  - Wir berechnen für alle C_{ij} den Free Space auf den Kanten
  - Wir berechnen den Reachable Space auf den Kanten in geeigneter Reihenfolge

6 Die kritischen Werte

- Je größer man ϵ wählt, desto „weiter“ wird der Free Space.

- Wenn man ϵ beginnend bei 0 stetig vergrößert, so ergeben sich viele Situationen, die bezogen auf den Erreichbarkeitsstatus der Gitterkanten äquivalent sind.

- Es gibt jedoch Situationen in denen sich die Erreichbarkeit ändern kann:
  1. $(0,0)$ und (p,q) werden Teil des Free Space
  2. Es entsteht ein neuer Übergang von einer Zelle zu einer anderen

3. Es entsteht ein horizontaler oder vertikaler Durchgang von einer Zelle C zu einer anderen Zelle D.

- Diese drei Typen von Ereignissen im Free Space-Diagramm haben eine geometrische Entsprechung bei den Polygonzügen

  1. ϵ ist gerade so groß wie der Abstand von den beiden Startpunkten oder den beiden Endpunkten.
  2. ϵ ist gerade so groß wie der Abstand eines Punktes des einen Polygonzugs zu einer Strecke des anderen
  3. ϵ ist gerade so groß wie der gemeinsame kürzeste Abstand zweier Knoten des einen Polygonzugs zu einer Strecke des anderen.

- Vom Typ 1 gibt es nur einen Fall, weil es nur je einen Start- und Endpunkt pro Polygonzug gibt

- Vom Typ 2 gibt es $\mathcal{O}(p \cdot q)$ Fälle: Jeder Knoten von P kombiniert mit jeder Strecke aus Q und andersherum.

- Vom Typ 3 gibt es $\mathcal{O}(p^2 \cdot q + p \cdot q^2)$ Fälle, nämlich jede mögliche Kombination von zwei Eckpunkten aus P kombiniert mit den Strecken aus Q und andersherum.

- In der Summe sind dies $\mathcal{O}(p^2 \cdot q + p \cdot q^2)$ Fälle. Jeder Fall entspricht einem möglichen Wert für ϵ. Wir berechnen das jeweilige ϵ in $\mathcal{O}(1)$ Zeit. Die Liste von möglichen ϵ zu sortieren ist der ausschlaggebende Zeitaufwand mit $\mathcal{O}((p^2 \cdot q + p \cdot q^2)\log(p \cdot q))$ Zeit.