

Real World Haskell

Blatt 7

Julian Fleischer, Alexander Steen

Montag, den 05. 08. 2013

Aufgabe 1 (Freie Variablen von Termen) Für einen Term t sind die *freien Variablen von t* $FV(t)$ genau die Variablen, die nicht gebunden sind. Geben Sie eine induktive Definition von $FV(t)$.

Aufgabe 2 (Größe von Termen) Die Größe $size(t)$ eines Termes t ist definiert durch
 $size(x) = 1$, für alle Variablen $x \in \mathcal{V}$
 $size(\lambda x.t) = 1 + size(t)$, für alle Terme $t \in \mathcal{T}$
 $size(t_1 t_2) = size(t_1) + size(t_2)$, für alle Terme $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.

Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ gilt: $|FV(t)| \leq size(t)$

Aufgabe 3 (Fixpunktkombinatoren) Zeigen Sie, dass folgende Terme Fixpunktkombinatoren sind:

- (1) $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
- (2) $(\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$
- (3) $\lambda f.(\lambda x.f(\lambda y.xxy))(\lambda x.f(\lambda y.xxy))$

Aufgabe 4 (Fakultät im ungetypten Lambda-Kalkül) Definieren Sie die Funktion `fak`, die bei Eingabe n die Fakultät von n zurückgibt, im ungetypten Lambda-Kalkül. Sie müssen dazu einen Fixpunktkombinator verwenden. Sie können dabei annehmen, dass die üblichen Operatoren als vordefinierte Konstanten existieren (z.B. `0,1,...,add,mult,true,false,if ... then ... else ...`).

Aufgabe 5 (Typherleitung) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Typherleitungsbaums, dass die folgenden Ausdrücke (samt angegebenen Kontext) im einfach-getypten Lambda-Kalkül wohlgetypt sind:

- (1) $f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash f(\text{if false then true else false}) : \text{Bool}$
- (2) $f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \lambda x : \text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

Sie können dazu die folgende zusätzlich Regel benutzen:

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash t_2 : T \quad \Gamma \vdash t_3 : T}{\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T} \text{ (T-IF)}$$