Kay Rülling 27. Mai 2019

Übungsblatt 6
Garbenkohomologie auf Schemata [1]

Aufgabe 1. Sei X ein noethersches integres und lokal faktorielles Schema mit Funktionenkörper K. (Ein Schema X heißt *lokal faktoriell*, wenn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ in allen Punkten $x \in X$ faktoriell sind.) Wir sagen ein Punkt $x \in X$ ist ein 1-codimensionaler Punkt von X, wenn $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$; die Menge dieser Punkte bezeichnen wir mit $X^{(1)}$ und die von $X^{(1)}$ frei erzeugte Gruppe mit $Z^1(X) := \oplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Z} \cdot [x]$.

(1) Sei $x \in X^{(1)}$. Für $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ definiere

$$v_x(a) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a \in \mathfrak{m}_x^n\},$$

wobei $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal ist und $\mathfrak{m}_x^0 := \mathcal{O}_{X,x}$. Für $a/b \in K^\times$ definiere $v_x(a/b) := v_x(a) - v_x(b)$.

Zeigen Sie, dass $v_x : K^\times \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto v_x(f)$ eine *diskrete Bewertung* definiert, d.h. v_x erfüllt, $v_x(fg) = v_x(f) + v_x(g)$ und $v_x(f+g) \geq \min\{v_x(f), v_x(g)\}$.

(2) Sei $f \in K^\times$. Zeigen Sie, dass $v_x(f) \neq 0$, für nur endlich viele $x \in X^{(1)}$. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass f eine Einheit auf einer dichten offenen Menge ist und benutzen Sie, dass ein noetherscher topologischer Raum nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt.)

(3) Für $x \in X$, bezeichnen wir mit $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ den Restklassenkörper von x und mit $i_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ die natürliche Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$0 \to \mathcal{O}_X^\times \to i_{\eta *} K^\times \xrightarrow{\operatorname{div}} \oplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*} \mathbb{Z} \to 0$$

eine flasque Auflösung von $\mathcal{O}_X^\times$ ist. Hier bezeichnet $\eta \in X$ den generischen Punkt und auf $U \subset X$ ist div gegeben durch $\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X^{(1)} \cap U} v_x(f) \cdot [x]$. (*Hinweis:* Für die Exaktheit in der Mitte zeigen Sie zuerst $\mathcal{O}_X(U) = \cap_{x \in X^{(1)} \cap U} \mathcal{O}_{X,x} \subset K$, für alle offenen $U \subset X$.)

[1] Fragen oder Kommentare bitte an `kay.ruelling@fu-berlin.de`

(4) Sei $\mathrm{CH}^1(X) := \mathrm{Coker}(\mathrm{div} : K^\times \to Z^1(X))$. Schließen Sie,

$$H^i(X, \mathcal{O}_X^\times) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(X)^\times, & i = 0, \\ \mathrm{CH}^1(X), & i = 1, \\ 0, & i \neq 0, 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Sei k ein Körper. Schließen Sie aus Aufgabe 1, (4)

(1) $H^1(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{O}^\times_{\mathbb{A}^n_k}) = 0$;
(2) $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^n_k}) = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Sei X ein noetherscher topologischer Raum und F eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Menge, so dass $F_x = 0$ für alle $x \in X \setminus Z$. Zeigen Sie,

$$H^j(X, F) = 0, \quad \text{für alle } j > \dim Z.$$

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei F eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Definiere für $n \geq 0$,

$$\tilde{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, F) := \prod_{(i_0, \ldots, i_n) \in I^n} j_*(F_{|U_{i_0, \ldots, i_n}}),$$

wobei $j : U_{i_0, \ldots, i_n} := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n} \hookrightarrow X$ die entsprechende offene Einbettung bezeichnet. Wir definieren das Differential $d : \tilde{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U}, F) \to \tilde{\mathcal{C}}^{n+1}(\mathcal{U}, F)$ als alternierende Summe über die Einschränkungen, wie für den Čech Komplex aus der Vorlesung.

(1) Zeigen Sie, dass $(\tilde{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F), d)$ ein Komplex ist.
(2) Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung $F \to \tilde{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, F)$ eine Auflösung $F \to \tilde{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ von F induziert. (*Hinweis:* Schließen Sie wie in §6, Lemma 5, Proposition 6; beachten Sie, dass die Homotopie s in diesem Fall einfacher zu definieren ist, weil die Indizes nicht geordnet sein müssen.)
(3) Schließen Sie, dass $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F)$ quasi-isomorph zum Čech Komplex $\mathcal{C}(\mathcal{U}, F)$ aus der Vorlesung ist.