29. November 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie, dass in einem faktoriellen Ring jedes irreduzible Element auch prim ist.

Aufgabe 7.2. Sei $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit drei Elementen. Für $a \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $\bar{a} = a + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{F}_3$ für seine Restklasse. Gegeben seien die beiden Polynome in $\mathbb{F}_3[X]$

$$f = X^5 + X^3 + X^2 + \bar{1}, \quad g = X^4 + X^3 + X - \bar{1}.$$

(1) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g) \in \mathbb{F}_3[X]$. (*Hinweis:* Euklidischer Algorithmus.)
(2) Ist $\mathrm{ggT}(f, g)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$?
(3) Ist $\mathbb{F}_3[X]/(f, g)$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.
(4) Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}_3[X]/(f, g)$?

Aufgabe 7.3. Sei R ein faktorieller Ring und $K = \mathrm{Frac}(R)$ sein Quotientenkörper. Sei $\mathcal{P} \subset R$ ein Repräsentantensystem von Primelementen von R und $p \in \mathcal{P}$ ein Primelement. Sei $v_p : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die Abbildung aus der Vorlesung, die gegeben ist durch $v_p(0) = \infty$ und für $u, v \in R^\times$ und natürliche Zahlen $n_q, r_q \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathcal{P}$, (alle bis auf endlich viele $= 0$)

$$v_p\left(\frac{u \prod_{q \in \mathcal{P}} q^{n_q}}{v \prod_{q \in \mathcal{P}} q^{r_q}}\right) = n_p - r_p.$$

(1) Zeigen Sie, dass $R_{(p)} := \{x \in K \mid v_p(x) \geq 0\}$ ein Unterring von K ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Eigenschaften von v_p aus der Vorlesung.)
(2) Zeigen Sie, dass $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} R_{(p)} = R$, wobei wir R mit seinem Bild in K identifizieren, also mit $\{\frac{a}{1} \in K \mid a \in R\}$.

Aufgabe 7.4. (1) Sei $a \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Wir nehmen an, es gibt ein *normiertes* Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit Koeffizienten in den ganzen Zahlen, so dass $f(a) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $a \in \mathbb{Z}$ gelten muss. (*Hinweis:* Gauß Lemma.)
(2) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass (1) im Allgemeinen falsch ist, wenn f nicht normiert ist.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`