

15. November 2017

**Algebra und Zahlentheorie**<sup>1</sup>  
**Übungsblatt 5**

Zur Erinnerung:  $a \equiv b \pmod{n}$  ist gleichbedeutend mit  $\bar{a} = \bar{b}$  in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 5.1.** (1) Sei  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $m \equiv 2 \pmod{3}$ . Zeigen Sie, dass es keine ganzen Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$  gibt, die folgende Gleichung erfüllen

$$m = x^2 + 3y^5$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Gleichung in  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .)

(2) Sei  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\bar{n} := n + 5\mathbb{Z} \in \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \subset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass es keine ganzen Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$  gibt, die folgende Gleichung erfüllen

$$n = x^4 - 25y^7.$$

**Aufgabe 5.2.** Seien  $L$  und  $K$  zwei Körper. Ist der Produktring  $L \times K$  ein Körper? Ist er integer? Gibt es ein von Null verschiedenes Element  $x \in L \times K$ , dass nilpotent ist? (Wenn  $R$  ein Ring ist, dann heißt  $x \in R$  *nilpotent*, falls es ein  $n \geq 1$  gibt mit  $x^n = 0$ .) Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 5.3.** Finden Sie alle ganzen Zahlen  $a \in \mathbb{Z}$ , die folgende Bedingungen erfüllen

$$a \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{und} \quad a \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{und} \quad a \equiv 3 \pmod{5}.$$

(*Hinweis:* Chinesischer Restklassen Satz.)

**Aufgabe 5.4.** Am letzten Schultag vor den Sommerferien möchte der Rektor vor den auf dem Schulhof versammelten Schülern eine flammende Rede halten, die die Schüler zum Lernen in den Ferien motivieren soll. Doch der Rektor schaut etwas skeptisch auf die Schülerschaft. Sind etwa einige seiner 653 Eleven bereits früher in die Ferien aufgebrochen? Um Gewissheit zu erhalten, sollen sich die Schüler erst in Gruppen zu 25 zusammenfinden, dabei bleibt eine Gruppe mit 21 Schülern über, dann sollen sie 26er Gruppen bilden, dabei bleibt eine Gruppe mit 25 Schülern über. Wie viele Schüler stehen auf dem Hof?

---

<sup>1</sup>Fragen oder Kommentare an [kay.ruelling@fu-berlin.de](mailto:kay.ruelling@fu-berlin.de) oder [filip@zedat.fu-berlin.de](mailto:filip@zedat.fu-berlin.de)