01. November 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. (1) Sei G eine Gruppe mit 6 Elementen. Sei H eine Untergruppe von G, die nicht trivial ist (also nicht nur das neutrale Element enthält) und nicht gleich G ist. Zeigen Sie, $\mathrm{ord}(H) \in \{2, 3\}$.

(2) Schließen Sie, dass G eine Untergruppe der Ordnung 3 besitzt.
(*Hinweis:* Zeigen Sie dass sonst jedes $a \in G$ Ordnung zwei hat und somit selbstinvers ist. Schließen Sie, das G insbesondere kommutativ ist. Zeigen Sie, dass dann je zwei Elemente aus G eine Untergruppe der Ordnung 4 erzeugen. Ein Widerspruch.)

(3) Schließen Sie, dass G ein Element ζ der Ordnung 3 enthält und ein Element σ der Ordnung 2, so dass

$$G = \{1, \zeta, \zeta^2, \sigma, \sigma\zeta, \sigma\zeta^2\}.$$

(4) Nehmen Sie an, dass G abelsch ist. Zeigen Sie $\mathrm{ord}(\sigma\zeta) = 6$. Schließen Sie, dass G zyklisch ist.

(5) Nehmen Sie an, dass G nicht abelsch ist. Zeigen Sie, dass dann $\zeta\sigma = \sigma\zeta^2$ und $\zeta^2\sigma = \sigma\zeta$ gelten muss.

(6) Schließen Sie, dass eine Gruppe mit 6 Elementen, entweder isomorph ist zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder zur 3. Permutationsgruppe S_3.
(*Hinweis:* Im nicht abelschen Fall, zeigen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to S_3$ gibt, der $\varphi(\sigma) = (1, 2)$ und $\varphi(\zeta) = (1, 2, 3)$ erfüllt. Hierbei ist $(1, 2)$, die Permutation, die 1 und 2 vertauscht und $(1, 2, 3)$ die Abbildung $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$.)

Definition 1. *Seien R und S zwei Ringe (wie immer kommutativ mit 1). Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ heißt* Ringhomomorphismus*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$*, für alle* $a, b \in R$*;*
(2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$*, für alle* $a, b \in R$*;*
(3) $\varphi(1) = 1$.

Wir sagen ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ist ein Isomorphismus (von Ringen), falls es einen Ringhomomorphismus $\psi : S \to R$ gibt mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_S$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_R$.

Aufgabe 3.2. Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, φ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn φ bijektiv ist.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

Aufgabe 3.3. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$.

Aufgabe 3.4. Sei R ein Ring und $\mathbb{Z}[X]$ der Polynomring in einer Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X], R)$ die Menge der Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to R$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X], R) \to R, \quad \varphi \mapsto \varphi(X)$$

bijektiv ist.