17. Januar 2018

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1. Gibt es einen Körper K, dessen multiplikative Gruppe isomorph ist zur additiven Gruppe

(1) $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$?
(2) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Begründen Sie ihre Antwort. Wenn die Antwort positiv ist, finden Sie eine Primzahl p und ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$, so dass $K = \mathbb{F}_p[X]/(f)$ diese Eigenschaft hat.

Aufgabe 12.2. Sei K ein Körper und $K(T) = \mathrm{Frac}(K[T])$ der rationale Funktionenkörper. Wir betrachten das Polynom $f = X^{p^2} - TX^p - T \in K(T)[X]$. Für

(a) $K = \mathbb{Q}$ und
(b) $K = \mathbb{F}_p$

beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort:

(1) Ist f irreduzibel?
(2) Ist f separabel?
(3) Wie viele verschiedene Nullstellen hat f in einem algebraischen Abschluss $\overline{K(T)}$ von $K(T)$.
(4) Falls f irreduzibel ist: Setze $L = K(T)[X]/(f)$. Was ist der Separabilitätsgrad der Körpererweiterung $L/K(T)$?

Aufgabe 12.3. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.

(1) Setze $E := \{a \in L \mid a \text{ ist separabel über } K\}$. Zeigen Sie, dass E ein Körper ist. (Es ist der *separable Abschluss von K in L.*)
(2) Zeigen Sie, dass es für alle $a \in L$ ein $r \geq 0$ gibt mit $a^{p^r} \in E$. (*Hinweis:* Sei $f \in E[X]$, das Minimalpolynom von a über E. Wir wissen aus der Vorlesung, es gibt ein $r \geq 0$ und ein irreduzibles, separables Polynom $g \in E[X]$ mit $f(X) = g(X^{p^r})$.)
(3) Zeigen Sie, dass L nicht separabel ist über E.

Eine Körpererweiterung L/E wie in (2) heißt *rein inseparabel.*

Aufgabe 12.4. Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$ und sei $f \in K[X]$ ein (nicht notwendig irreduzibles) Polynom vom Grad n. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist separabel.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

(2) Es gibt einen Isomorphismus von Ringen

$$\overline{K}[X]/(f) \cong \underbrace{\overline{K} \times \ldots \times \overline{K}}_{n-\text{Stück}} =: \overline{K}^{\times n}.$$

(Hinweis: Chinesischer Restklassensatz. Zeigen Sie außerdem, dass ein Produkt von Körpern $\overline{K}^{\times n}$ keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente hat, also für $a \in \overline{K}^{\times n}$ gilt $a^r = 0 \Leftrightarrow a = 0$.)