Kay Rülling 10. Juli 2019

Übungsblatt 6
Algebraische Kurven und die Weil Vermutungen [1]

Aufgabe 1. Sei $f : C' \to C$ ein dominanter k-Morphismus zwischen glatten projektiven und geometrisch zusammenhängenden Kurven über einem perfekten Körper k. Wir nehmen an, dass die induzierte Funktionenkörpererweiterung $k(C')/k(C)$ separabel ist. Für $y \in C'_{(0)}$ definieren wir $r_y \in \mathbb{N}_0$ wie folgt: Sei $t_x \in \mathcal{O}_{C,x}$ ein lokaler Parameter in $x = f(y)$ und $t_y \in \mathcal{O}_{C',y}$ ein lokaler Parameter in y; nach Aufgabe 5.3, 2) finden wir ein $g_x \in \mathcal{O}_{C',y}$ mit $f^*dt_x = g_x dt_y$ in $\Omega^1_{C'/k,y}$; setzte

$$r_y := v_y(g_x).$$

(1) Zeigen Sie, $r_y = \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{C',y}}(\Omega^1_{C'/C,y})$. Insbesondere ist die Definition von r_y unabhängig von allen Wahlen. (*Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 5.3, 2) und eine passende exakte Sequenz für die Differentiale.)

(2) Sei $p = \mathrm{char}(k) \geq 0$. Wir nehmen an $p = 0$ oder $e_y := v_y(t_x)$ ist prim zu p. Zeigen Sie, $r_y = e_y - 1$.

(3) Zeigen Sie,
$$[K'_C] = f^*[K_C] + [R], \quad \text{in } \mathrm{CH}^1(C')$$
wobei $R := \sum_{y \in C'_{(0)}} r_y \cdot [y] =$ *Verzweigungsdivisor von* f, f^* ist definiert wie in Aufgabe 5.1 und K_C, $K_{C'}$ sind die kanonische Divisoren. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Beschreibung des kanonischen Divisors aus 5.3, 3).)

(4) Folgern Sie die Hurwitz Geschlechtformel:
$$2g(C') - 2 = n \cdot (2g(C) - 2) + \deg R, \quad \text{wobei } n = [k(C') : k(C)].$$

(5) Folgern Sie, wenn $C' = \mathbb{P}^1_k$, dann ist auch C isomorph zu $\mathbb{P}^1_k$. (Das ist eine schwache Form des Satzes von Lüroth.)

Aufgabe 2. Sei k ein Körper und $f : X \to \mathbb{A}^2_k$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^2_k$ in $(0, 0)$. (Also $X = \mathrm{Proj}\, R[S, T]/(xS - Ty)$, wobei $R = k[x, y]$ der Koordinatenring von $\mathbb{A}^2_k$ ist, siehe auch Aufgabe 8.3 der Kohomologie-von-Garben-Vorlesung.)

---
[1] Fragen oder Kommentare bitte an `kay.ruelling@fu-berlin.de`

(1) Zeigen Sie, $f^{-1}(0,0) =: E$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^1_k$. (Man nennt E den exzeptionellen Divisor der Aufblasung.)

(2) Zeigen Sie, $(E.E) = -1$, d.h. die Selbstschnittzahl von E auf X ist -1. (*Hinweis:* Wenn $I \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe von E ist, zeigen Sie zuerst, dass der Isomorphismus aus (1) einen Isomorphismus $I/I^2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1)$ induziert.)

Aufgabe 3. Sei C eine glatte geometrisch zusammenhängende projective Kurve über einem perfekten Körper k. Sei $X = C \times_k C$ und $\Delta \subset X$ die Diagonale (das Bild der Diagonaleinbettung von C.) Zeigen Sie

$$(\Delta.\Delta) = 2 - 2g(C).$$

(*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die ursprüngliche Definition von $\Omega^1_{C/k}$ in der Kohomologie-von-Garben-Vorlesung.)