Kay Rülling 22. Mai 2019

Übungsblatt 3
Algebraische Kurven und die Weil Vermutungen [1]

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X ist eine Familie $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$ indiziert durch eine Menge I, so dass $X = \cup_i U_i$. Eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathcal{U}$ - wir schreiben $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ -, falls es eine Abbildung $\tau : J \to I$ gibt mit $V_j \subset U_{\tau(j)}$, $j \in J$.

Zeigen Sie, dass $\prec$ die Struktur einer gerichteten Menge auf der Menge der offenen Überdeckungen induziert.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und F eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Für eine gegebene offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ definiere die beiden Abbildungen (wobei $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ usw.)

$$\delta_0 : \prod_{i\in I} F(U_i) \to \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_{i,j}), \quad (a_i)_i \mapsto (a_{i|U_{i,j}} - a_{j|U_{i,j}})_{(i,j)},$$

und

$$\delta_1 : \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_{i,j}) \to \prod_{(i,j,k)\in I^3} F(U_{i,j,k}),$$

$$(a_{i,j})_{(i,j)} \mapsto (a_{i,j|U_{i,j,k}} - a_{i,k|U_{i,j,k}} + a_{j,k|U_{i,j,k}})_{(i,j,k)}.$$

(1) Zeigen Sie $\mathrm{Ker}(\delta_1) \supset \mathrm{Im}(\delta_0)$. Wir setzen

$$H^1(\mathcal{U}, F) := \mathrm{Ker}(\delta_1)/\mathrm{Im}(\delta_0).$$

(2) Sei $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J} \prec \mathcal{U}$ eine Verfeinerung (siehe Aufgabe 1). Sei $\tau : J \to I$ mit $V_j \subset U_{\tau(j)}$. Wir definieren $\tau^* : \prod_{(r,s)\in I^2} F(U_{r,s}) \to \prod_{(i,j)\in J^2} F(V_{i,j})$ via

$$\tau^*(a)_{i,j} := a_{\tau(i),\tau(j)|V_{i,j}}.$$

Zeigen Sie τ^* induziert einen Gruppenhomomorphismus $\tau^* : H^1(\mathcal{U}, F) \to H^1(\mathcal{V}, F)$.

(3) In der Situation von (2) wähle ein anderes $\tau' : J \to I$ mit $V_j \subset U_{\tau'(j)}$. Zeigen Sie $\tau^* = \tau'^* : H^1(\mathcal{U}, F) \to H^1(\mathcal{V}, F)$. (*Hinweis:* Für $a = (a_{r,s}) \in \mathrm{Ker}(\delta_1^{\mathcal{U}})$ zeigen Sie zuerst $a_{\tau(i),\tau(j)|V_{i,j}} - a_{\tau'(i),\tau'(j)|V_{i,j}} = a_{\tau(i),\tau'(i)|V_i|V_{i,j}} - a_{\tau(j),\tau'(j)|V_j|V_{i,j}}$.)

[1] Fragen oder Kommentare bitte an `kay.ruelling@fu-berlin.de`

(4) Schließen Sie aus (2) und (3), dass eine Verfeinerung $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ einen wohl definierten Gruppenhomomorphismus
$$H^1(\mathcal{U}, F) \to H^1(\mathcal{V}, F)$$
induziert. Somit können wir den direkten Limes
$$\check{H}^1(X, F) := \varinjlim H^1(\mathcal{U}, F),$$
über die gerichtete Menge der offenen Überdeckungen (siehe Aufgabe 1) definieren.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema und $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe von abelschen Gruppen, die durch $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^\times$(= multiplikative Einheiten in $\mathcal{O}_X(U)$) gegeben wird.

(1) Sei L eine invertierbare Garbe auf X. Es gibt also eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)$ mit $L_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$. Der $\mathcal{O}_{U_{i,j}}$-lineare Isomorphismus $\mathcal{O}_{U_{i,j}} \cong L_{|U_i|U_{i,j}} \cong L_{|U_j|U_{i,j}} \cong \mathcal{O}_{U_{i,j}}$ wird durch Multiplikation mit einem Schnitt $g_{j,i} \in \Gamma(U_{i,j}, \mathcal{O}_X^\times)$ induziert. Zeigen Sie, dass $(g_{i,j})_{(i,j)}$ ein wohl-definiertes Element $\gamma(\mathcal{U}, L) \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ bestimmt.

(2) Ist L eine invertierbare Garbe, die auf einer offenen Menge $\mathcal{U}$ trivialisiert wird, bezeichnen wir mit $\gamma(L)$ das Bild von $\gamma(\mathcal{U}, L)$ unter der natürlichen Abbildung $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$. Zeigen Sie, dass es einen wohl definierten Gruppenisomorphismus
$$\operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times), \quad [L] \mapsto \gamma(L),$$
gibt.

Aufgabe 4. Sei A ein Ring und $\mathbb{P}_A^n$ der n-dimensionale projektive Raum über Spec A. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(r)$ die r-te getwistete Garbe auf $\mathbb{P}_A^n$, $r \in \mathbb{Z}$. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0,\ldots,n}$ die Standardüberdeckung von $\mathbb{P}_A^n$. Konstruieren Sie $\gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(r)) \in H^1(\mathcal{U}, \mathbb{P}_A^n)$ aus Aufgabe 3, (1) explizit.