Kay Rülling 07. Mai 2019

Übungsblatt2 Algebraische Kurven und die Weil Vermutungen [1]

Aufgabe 1. Sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema. Zeigen Sie:

(1) X ist zusammenhängend $\iff$ die einzigen idempotenten Elemente von A sind 1 und 0, d.h. wenn $e \in A$ die Gleichung $e^2 = e$ erfüllt, dann gilt $e \in \{0, 1\}$.

(2) X ist irreduzibel und reduziert $\iff$ A ist ein Integritätsbereich. In diesem Fall sagen wir, dass X *integer* ist.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper.

(1) Sei $X := Z(x^2 + y^2) \subset \mathbb{A}^2_k$. Zeigen Sie, dass X genau dann integer ist, wenn -1 kein Quadrat in k ist.

(2) Sei $Y := Z(x^2 + y^2 + z^2)$. Zeigen Sie, dass Y immer irreduzible ist. (*Hinweis:* Sie können das Eisenstein Irreduzibilitätskriterium aus der Algebra benutzen.)

Aufgabe 3. Sei k ein perfekter Körper der Characteristik $\neq 2$. Gegeben seien die Polynome

(1) $f_1 = x^2 - (x^4 + y^4)$;

(2) $f_2 = x^2 y + xy^2 - (x^4 + y^4)$.

Setze $X_i := V(f_i) = \operatorname{Spec} k[x, y]/(f_i) \subset \mathbb{A}^2_k$ und bezeichne mit $\overline{X}_i \subset \mathbb{P}^2_k$ den Abschluss von X_i (mit der reduzierten Schemastruktur). Entscheiden Sie, ob X_i oder $\overline{X}_i$ glatt sind und falls nicht, berechnen Sie die singulären Punkte.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 3$ und $a \in k \setminus k^p$ (insbesondere ist k nicht perfekt). Sei $A = k[x, y]/(y^2 - x^p - a)$ und $X = \operatorname{Spec} A$. Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer Ring ist, dass aber X nicht glatt über k ist.

[1] Fragen oder Kommentare bitte an `kay.ruelling@fu-berlin.de`