Anleitung: Streichen Sie *eine* Aufgabe deutlich auf dem Angabeblatt. Diese Aufgabe wird nicht in die Bewertung einbezogen. *Alle Antworten sind zu begründen!* Jede Aufgabe hat 10 Punkte. Bearbeitungszeit: 90 Minuten

1. Die folgende Java-Klasse implementiert (teilweise) die Mengenoperationen für Mengen, die Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sind.

```
class Menge100
{  boolean [ ] a = new boolean[100];
   int größe = 0;
   public void enfügen(int x)
   {  if(a[x-1]==false) { a[x-1]=true; größe++; }
   }
   public boolean istleer() { return größe==0; }
   ...
}
```

   Geben Sie die Abstraktionsfunktion und die Darstellungsinvariante an, und beweisen Sie, dass die Operationen `einfügen` und `istleer` (mit geeigneten Vorbedingungen, falls nötig) korrekt implementiert sind.

2. Eine Zeichenkette $p_1p_2 \ldots p_m$ heißt *periodisch* mit Periode k, $(1 \le k \le m)$ wenn $p_i = p_{i+k}$ für $1 \le i < i+k \le m$ ist, mit anderen Worten, wenn

$$p_1 \cdots p_{m-k} = p_{k+1} \cdots p_m$$

   ist. (Für $k = m$ ist die Folge unperiodisch.)

   (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Periode und berechnen sie die Verschiebefunktion h für das Muster *ababcababcabab*. Verwenden Sie die Definition der Verschiebefunktion aus der Vorlesung.[1] Berechnen Sie auch den Wert $h(m+1)$.

   (b) (0 Punkte) Berechnen sie die Verschiebefunktion für *abcabcabcab*.

   (c) (7 Punkte) Wie kann man mit Hilfe der Verschiebefunktion die (kleinste) Periode k einer Zeichenkette bestimmen?

3. Konstruieren Sie mit dem Huffman-Algorithmus einen optimalen Kode für die Verteilung $(p_1, \ldots, p_6) = (\frac{8}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{5}{25}, \frac{5}{25}, \frac{4}{25})$. Zeigen Sie in einzelnen Schritten, wie der Algorithmus abläuft, und zeichnen Sie den optimalen Kode-Baum.
   Ist der optimale Kode eindeutig?

4. Leiten Sie aus der algebraischen Spezifikation für Mengen

$$\begin{aligned}
\mathit{istenthalten}(x, \mathit{leer}) &= \mathit{falsch} && && (1)\\
\mathit{istenthalten}(x, \mathit{einfüge}(x, M)) &= \mathit{wahr} && && (2)\\
\mathit{istenthalten}(x, \mathit{einfüge}(y, M)) &= \mathit{istenthalten}(x, M), && \text{für } x \ne y && (3)\\
\mathit{istenthalten}(x, \mathit{lösche}(x, M)) &= \mathit{falsch} && && (4)\\
\mathit{istenthalten}(x, \mathit{lösche}(y, M)) &= \mathit{istenthalten}(x, M), && \text{für } x \ne y && (5)
\end{aligned}$$

   folgende Identität her:

$$\mathit{istenthalten}(u, \mathit{einfüge}(x, \mathit{lösche}(u, M))) = \mathit{istenthalten}(u, \mathit{einfüge}(x, \mathit{leer}))$$

   Geben Sie dabei in jedem Beweisschritt die Nummer der verwendeten Gleichung an.

[1] Die ursprüngliche Definition der Verschiebefunktion aus der Vorlesung lautet

$$h_i = \max \{\, k \mid 1 \le k < i,\ p_1 \ldots p_{k-1} = p_{i-k+1} \ldots p_{i-1} \,\} \cup \{0\}, \qquad \text{für } i \ge 1.$$

Die verbesserte Verschiebefunktion vom 12. Übungsblatt ist so definiert:

$$h_i = \max \{\, k \mid 1 \le k < i,\ p_1 \ldots p_{k-1} = p_{i-k+1} \ldots p_{i-1} \text{ und } p_k \ne p_i \,\} \cup \{0\}, \qquad \text{für } i \ge 1.$$