**Grundlagen der theoretischen Informatik, SS 2001 — 1. Übungsblatt**

Abgabe bis Montag, 30. April 2001

1. (0 Punkte) Sei $\Sigma$ ein Alphabet mit $k$ Elementen und $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Wieviele Worte in $\Sigma^*$ haben die Länge $n$?
   (b) Wieviele Palindrome in $\Sigma^*$ haben die Länge $n$? (Ein Palindrom ist ein Wort, das von vorne und von hinten gelesen gleich ist.)
   (c) Wieviele Worte $w \in \{0,1\}^*$, die Binärdarstellung einer durch 5 teilbaren Zahl sind (führende Nullen sind erlaubt), haben die Länge $n$?
   (d) Wie ist es, wenn führende Nullen verboten sind?

   Jede Behauptung ist zu beweisen!

2. (0 Punkte) Beschreiben Sie die Sprache $L$, die durch den regulären Ausdruck
$$0^*(0 + 10^*1)^*(\varepsilon + 0 + 00)$$
   gegeben ist. (Alle Worte in $L$ haben eine sehr charakteristische Eigenschaft. Welche?) Beweisen Sie Ihre Behauptung! Gibt es einen einfacheren regulären Ausdruck für diese Sprache?

3. (6 Punkte)
   (a) (0 Punkte) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau die Worte $w$ über $\Sigma$ mit der folgenden Eigenschaft beschreibt: „$w$ enthält keine zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden gleichen Symbole," und zwar für $\Sigma_2 = \{a, b\}$, $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$, und für $\Sigma_4 = \{a, b, c, d\}$. Beweisen Sie, dass Ihr Ausdruck wirklich diese Sprache beschreibt!
   (b) (6 Punkte) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für die folgende Eigenschaft: „Jedes Symbol in $w$ steht neben einem gleichen Symbol." (Zum Beispiel hat das Wort *aaabbcccaa* diese Eigenschaft.)
   (c) (Zusatzaufgabe, 2 Punkte) Wieviele Wörter der Länge $n$ enthält die Sprache aus Aufgabe (b), für $\Sigma_2$ und $\Sigma_3$?

4. (6 Punkte)
   (a) Codieren Sie das Alphabet $\{a, b, \ldots, z\}$ durch Binärworte, so dass jedes codierte Wort wieder eindeutig decodierbar ist! (Eine ungeeignete Codierung wäre z.B. $a \mapsto 0, b \mapsto 01, c \mapsto 100$, etc. In diesem Fall könnte nämlich 0100 von $ac$ oder von $baa$ herstammen.) Zeigen Sie, dass Ihre Codierung die gewünschte Eigenschaft hat.
   (b) Das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei durch $a \mapsto 0$ und $b \mapsto 010$ codiert. Zeigen Sie, dass diese Codierung eindeutig decodierbar ist!

5. (4 Punkte) Welche der folgenden Gleichungen gelten für alle regulären Ausdrücke?
   (a) $(AB)C = A(BC)$
   (b) $(A^*)^* = A^*$
   (c) $(A + B)^* = A^* + B^*$
   (d) $(A^*B^*)^* = (A + B)^*$

   Beweisen Sie Ihre Antworten.
   Zusatzfrage (2 Punkte): Wenn eine Beziehung nicht als Gleichung gilt, in welchen Fällen gilt dann eine Inklusionsbeziehung ($\subseteq$ oder $\supseteq$)?

6. (Zusatzfrage, 2 Punkte) Geben sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\Sigma = \{0, 1\}$ beschreibt, die 0110 nicht als Teilwort enthalten.