Graphentheoretische Algorithmen (Rote, Morin), 9. Übungsblatt
Abgabe bis zum Dienstag, 17.12.2001, in der Vorlesung

1. Geometrische Graphen (5 Punkte)
Gegeben seien n Punkte in der Ebene durch die Koordinaten (x_i, y_i). Auf diesen Punkten als Knotenmenge wird der folgende Graph definiert: Von jedem Punkt $P = (x, y)$ gibt es ungerichtete Kanten

1. zum höchsten Punkt, der links unterhalb von P liegt,
2. zum rechtesten Punkt, der links unterhalb von P liegt,
3. zum höchsten Punkt, der rechts unterhalb von P liegt,
4. zum linkesten Punkt, der rechts unterhalb von P liegt,
5. zum tiefsten Punkt, der links oberhalb von P liegt,
6. zum rechtesten Punkt, der links oberhalb von P liegt,
7. zum tiefsten Punkt, der rechts oberhalb von P liegt, und
8. zum linkesten Punkt, der rechts oberhalb von P liegt.

(Diese acht Punkte müssen nicht alle existieren, und sie müssen nicht alle verschieden sein.) Der Punkt (x', y') liegt links unterhalb von (x, y), wenn $x' < x$ und $y' < y$ ist, der höchste Punkt ist derjenige mit der größten y-Koordinate, usw. Wenn der höchste Punkt nicht eindeutig ist, kann ein beliebiger höchster Punkt ausgewählt werden.

1. Zeigen Sie, dass dieser Graph zusammenhängend ist, abgesehen von trivialen Ausnahmen.
2. Wie viele Kanten kann der Graph höchstens und mindestens haben?
3. Wie groß ist der Minimalgrad mindestens? Wie groß kann der Maximalgrad höchstens werden?

2. Wegeprobleme zur Lösung von Suchaufgaben (5 Punkte)
Drei Ehepaare möchten mit einem Boot, dass nur zwei Personen fasst, einen Fluss überqueren. Weil die Ehemänner so eifersüchtig sind, darf keine Frau ohne Anwesenheit ihres Ehemannes in Begleitung eines oder der beiden anderen Männer bleiben.

Modellieren Sie dieses Problem als Wegesuchproblem in einem Graphen. Welche Kriterien für einen optimale Lösung kann man definieren? Gibt es (bis auf Symmetrien) mehrere optimale Lösungen?

(Zusatzfrage: Gibt es eine einfache heuristische Funktion, die direkt zu einer Optimallösung führt?)

BITTE WENDEN

3. Kürzeste Wege in geometrischen Graphen (20 Punkte)
Erzeugen Sie für n zufällig erzeugte Punkte in der Ebene den Graphen aus Aufgabe 1. (Die möglichst effiziente Erzeugung des Graphen ist natürlich auch eine Herausforderung; sie spielt jedoch bei dieser Aufgabenstellung keine Rolle.) Die Länge einer Kante soll dabei der Euklidische Abstand der beiden Endpunkte sein.

Sie sollen den kürzesten Weg zwischen zwei zufällig gewählten Knoten des Graphen bestimmen. Verwenden Sie den Algorithmus von Dijkstra, und experimentieren Sie auch mit mindestens zwei verschiedenen heuristischen Funktionen, die nicht notwendigerweise konsistent sein müssen.

Untersuchen Sie dabei jeweils,

1. wie viele Knoten der Algorithmus besucht, und
2. wie groß gegebenfalls die Abweichung des gefundenen Weges vom Optimalweg ist (relativ und absolut).

Wiederholen Sie die Experimente mit mindestens 20 Punktepaaren.

Verwenden Sie die Programmiersprache Java. (Für andere Programmiersprachen, bitte vorher mit der Übungsleiterin abstimmen.) Diese Übung bitte per email mit Subject: „Graph Übung 9“ an „morin@inf.fu-berlin.de“ bis 23:59 Uhr am <u>6. Januar 2002</u> (Hl. Drei Könige) schicken. Die vollständige Implementierung und eine README Datei, sind in einem Archiv (tar + zip) zu verpacken, und als Attachment zu senden.

- Implementierung: bitte nur lauffähigen und compilierbaren Quellcode senden.
- README muss enthalten:
  - Namen der Studenten,
  - Genaue Anleitung, um das Programm zu compilieren und ablaufen zu lassen,
  - Angabe, wie die Punkte erzeugt wurden.
  - Ausgabe der Beispiele für $n = 100$ und $n = 200$ Punkte.