Graphentheoretische Algorithmen 2. Übungsblatt
am Dienstag 30.10.2001 die schriftlichen Übungen (2, 4 und 5) abgeben

1. (15 Punkte) Schreiben Sie ein Programm, das für eine gegebene positive ganze Zahl n, einen ungerichteten Graphen mit n Knoten $\{1, \ldots, n\}$ und den Kanten $\{(k, 2k) | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und $\{(2k+1, 6k+4) | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor\}$ aufbaut, und bestimmt:

- Die Zahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen,
- Ob der Graph ein Wald ist, d.h. ob jede Zusammenhangskomponente ein Baum ist.

Verwenden Sie die Programmiersprache Java. (Für andere Programmiersprachen, bitte vorher mit der Übungsleiterin abstimmen.) Diese Übung bitte per email mit Subject: "Graph Übung 2" an "morin@inf.fu-berlin.de" bis 23:59 Uhr am 20. Nov. 2001 abgeben. Die vollständige Implementierung und eine README Datei, sind in einem Archiv (tar + zip) zu verpacken, und als Attachment zu senden.

- Implementierung: bitte nur lauffähigen und compilierbaren Quellcode senden.
- README muss enthalten:
  - Namen der Studenten,
  - Genaue Anleitung, um das Programm zu compilieren und ablaufen zu lassen,
  - Erklärung der Wahl der Speicherung des Graphen,
  - Ausgabe der Beispiele $n = 100, 1000, 10000$.

2. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Relation auf der Kantenmenge eines Graphen eine Äquivalenzrelation ist

$$e \sim f \Leftrightarrow e = f \text{ oder es gibt einen einfachen Kreis, der } e \text{ und } f \text{ enthält.}$$

3. (freiwillige Zusatzaufgabe, 0 Punkte) Beweisen Sie: In einem zweifach zusammenhängenden ungerighteten Graphen gibt es

(a) durch je zwei Knoten u und v

(b) durch jeden Knoten u und jede Kante e

(c) durch je zwei Kanten e und f

einen einfachen Kreis.
Hinweis: Ein möglicher Beweisansatz ist Induktion nach der Länge des kürzesten Weges der u und v (beziehungsweise e und f) enthält.

4. (5 Punkte)

(a) T ist ein Tiefensuchwald. Die **Nachkommen** eines Knotens v in T sind die Knoten w, die über Vorwärtskanten in T von v erreichbar sind. $NNach(v)$ sei die Anzahl der Nachkommen von v (einschließlich v selbst). Beweisen Sie: Die Nachkommen von v sind genau die Knoten w mit

$$TSnum(v) \leq TSnum(w) < TSnum(v) + NNach(v)$$

(b) Wie kann man die Werte $NNach(v)$ während der Tiefensuche berechnen?

5. (5 Punkte) Eine **s-t-Nummerierung** für eine gegebene Kante (s, t) eines Graphen ist eine Nummerierung $g(v)$ der Knoten v mit den Zahlen $1, \ldots, n$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) $g(s) = 1$, $g(t) = n$

(b) Jeder Knoten $v \neq s, t$ hat zwei Nachbarn u und w mit $g(u) < g(v) < g(w)$.

Beweisen Sie: Ein Graph, der eine s-t-Nummerierung hat, ist zweifach Kanten-zusammenhängend.