Graphentheoretische Algorithmen (Rote, Morin), 13. Übungsblatt
Abgabe am Di., 5.02.2002, in der Vorlesung

1. Optimalitätskriterium für Rundflüsse mit minimaler Kosten (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass eine Zirkulation f genau dann minimale Kosten hat, wenn der Restgraph keinen Kreis mit negativen Kosten enthält.

Hinweis: Zerlegung des Differenzflusses im Restgraphen in Kreisflüsse.

2. (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Schichtgraph-Algorithmus zusammen mit dem Algorithmus von Dinitz auch für des pathologische Beispiel für der Ford und Fulkerson Algorithmus (11. Übungsblatt, 2. Ausgabe) einen maximalen Fluss findet.

3. „Wer A sagt, ...“ (5 Punkte)
Eine Unternehmerin hat verschiedene Unternehmungen (Projekte, Investitionen) $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ zur Auswahl. Bei jeder Unternehmung kann sie sich entscheiden, ob sie sie durchführt oder nicht. Diese Entscheidungen sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern es ist eine Menge von Paaren $A \subseteq P \times P$ gegeben, wobei $(p, q) \in A$ bedeutet, dass p nur dann durchgeführt werden kann, wenn auch q durchgeführt wird („p impliziert q“). Der Abhängigkeitsgraph (P, A) sei azyklisch.

Außerdem ist zu jeder Unternehmung p_i eine Zahl c_i gegeben, die für $c_i > 0$ die Kosten für die Durchführung des Projekts p_i angibt, bzw. für $c_i < 0$ den Gewinn.

Die Unternehmerin möchte eine zulässige Teilmenge von P auswählen, die den Nettogewinn maximiert.

Lösungsansatz. Gib zum Abhängigkeitsgraphen eine Quelle s und eine Senke t dazu. Verbinde s mit allen Knoten i, für die $c_i < 0$ ist, und verbinde alle Knoten i, für die $c_i > 0$ ist, mit t. Setze

$$\begin{aligned} u_{si} &:= -c_i && \text{für } c_i < 0 \\ u_{it} &:= c_i && \text{für } c_i > 0, \text{ und} \\ u_{ij} &:= \infty && \text{für } (p_i, p_j) \in A. \end{aligned}$$

1. Zeige, dass für jeden s-t-Schnitt $(S, V \setminus S)$, der endliche Kapazität hat, die Menge $S \setminus \{s\}$ eine zulässige Menge von Unternehmungen ist, und umgekehrt.

   Welche Beziehung besteht zwischen dem Nettogewinn dieser Menge und der Kapazität des Schnittes?

   Wie kann man mit Hilfe dieses Netzes das Problem der Unternehmerin lösen?

2. Denke dir zwei sinnvolle und realistische Anwendungsbeispiele für dieses Problem aus.

3. Was passiert, wenn der Abhängigkeitsgraph Kreise enthält?