Graphentheoretische Algorithmen (Rote, Morin), 10. Übungsblatt
Abgabe bis zum Dienstag, 15.01.2002, in der Vorlesung

Die Vorlesung entfällt in der Woche von 7.–11. Januar 2002. Sie wird dafür an den darauffolgenden Donnerstagen von 15–16 Uhr nachgeholt.

1. (5 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph wobei jeder Kante $(u, v) \in E$ ein Wert $r((u, v))$, $0 \leq r((u, v)) \leq 1$ zugeordnet ist, der die Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) der Verbindung von u nach v angibt. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeiten der Kanten unabhängig sind. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den sichersten Weg zwischen zwei vorgegebenen Knoten findet.

2. (5 Punkte)
Geben Sie eine Familie fon Graphen mit n Knoten und m Kanten an, für die der Algorithmus von Dijkstra $\Omega(m)$ mal die Markierung d_i eines Knotens ändert.

3. Graphen mit negativen Kantenlängen (10 Punkte)
In Graphen mit negativen Kantenlängen funktioniert der Algorithmus von Dijkstra nicht. Man kann ihn auf zwei Arten reparieren

(a) Man lässt den Algorithmus unverändert laufen, und akzeptiert die Lösung als Näherungslösung. Nehmen Sie an, dass der Graph n Knoten hat und die Kantenbewertungen reelle Zahlen zwischen -1 und 1 sind. Wie stark kann dann der gefundene Weg vom kürzesten Weg abweichen? (Es reicht, wenn Sie die Größenordnung bestimmen.)

    Zusatzfrage (0 Punkte): Wie groß kann der Fehler höchstens sein, wenn es nur *eine* negative Kante gibt.

(b) Man modifiziert den Algorithmus, indem man einen Knoten i, dessen Bewertung d_i sich ändert, wieder in die Menge N der zu bearbeitenden Knoten aufnimmt, selbst wenn er schon bearbeitet worden ist. Zeigen Sie, dass der Algorithmus in diesem Fall exponentielle Laufzeit haben kann.

4. (0 Punkte, zum Nachdenken)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit positiv Kantengwicht. Wie kann man den zweitkürzesten Weg von s nach t finden?

5. (0 Punkte, zum Nachdenken)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und w die Wertfunktion, so dass

$$w : E \longrightarrow \{0, 1, \dots, W - 1\},$$

mit $W > 0$. Modifizieren Sie den Algorithmus von Dijkstra, so dass die kürzesten Wege von einen gegebenen Knoten s in $O(W|V| + |E|)$ gefunden werden.