Mathematische Optimierung, SS 1998 — Modellierungsaufgaben

Erstellen Sie für Ihre gewählte Aufgabe ein mathematisches (Optimierungs-)Modell. Versuchen Sie, Ihr Modell möglichst allgemein zu halten, sodass eventuelle Veränderung in den Daten und in der Aufgabenstellung keinen großen Aufwand verursachen. Erklären Sie die Bedeutung aller Größen und Restriktionen, entweder auf einem Blatt Papier oder als Kommentar im AMPL-Modell. Die genaue Aufgabenstellung oder die Zielfunktion, die Sie wählen müssen, geht nicht bei allen Aufgaben explizit aus dem Text hervor. In diesen Fällen müssen Sie vernünftige Annahmen machen beziehungsweise mehrere Ansätze in Erwägung ziehen und miteinander vergleichen.

Lösen Sie die gestellte Aufgabe mit den angegebenen Daten oder mit verschiedenen von Ihnen selbst gewählten Datensätzen.

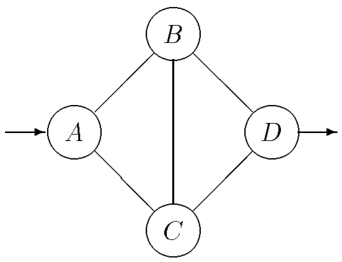
Sie können die Aufgaben auch in Gruppen bearbeiten. Die angegebene Anzahl von Personen ist eine Richtlinie für den Umfang oder die Schwierigkeit der Aufgabe und gleichzeitig eine Obergrenze für die Gruppengröße. Bei der Abgabe der Lösung muss die Gruppe gemeinsam ihr Modell und ihre Ergebnisse erläutern.

Modellierungsaufgabe 1 (für 2–3 Personen):
Beschleunigung von Datenbanksystemen durch „Prefetching“

Im Speichersystem eines Rechners oder in einem Datenbanksystem ist der Speicher oft in einen kleineren und schnelleren „Cache“-Speicher bzw. Hauptspeicher der Größe k und einen großen und langsamen Hintergrundspeicher eingeteilt. Ein Programm greift auf eine Folge von Speicherblöcken („Seiten“) zu, z. B. $ABCDABCFABFG$, die im Vorhinein bekannt und gegeben ist. Wenn das Programm einen Block anspricht, der nicht im Cache geladen ist, dann muss es warten. Das Austauschen eines Speicherblockes im Cache gegen einen Speicherblock im Hintergrundspeicher findet parallel zur Arbeit des Programmes statt und benötigt F Schritte. Es kann immer nur eine Austauschoperation gleichzeitig stattfinden. Während dieser Zeit ist die Speicherseite, die in den Hauptspeicher geladen wird, noch nicht verfügbar, und die Seite, die aus dem Hauptspeicher in den Hintergrundspeicher ausgelagert wird, nicht mehr verfügbar. Zu welchen Zeiten sollen welchen Blöcke zwischen dem Haupt- und Hintergrundspeicher ausgetauscht werden, damit die Gesamtbearbeitungszeit minimiert wird?

Modellierungsaufgabe 2 (für 3–4 Personen):
Gleichgewicht des Verkehrsflusses in einem Straßennetz

Im folgenden Straßennetz möchten Autos von A nach D gelangen, indem Sie den Weg über B, C oder über beide Knoten nehmen.



Straße	Fahrzeit	Kapazität	Staufaktor
AB	5	10	0,1
AC	1	30	0,9
BC	2	10	0,9
BD	1	30	0,9
CD	5	10	0,1

Die obige Tabelle gibt die Kapazität jeder Straße in Autos pro Minute und die günstigste Fahrzeit zwischen den Endknoten in Minuten an. Der *Staufaktor* $S_{ij} = S_{ji}$ gibt an, wie stark die Fahrzeit ansteigt, wenn sich der Verkehrsfluss der Kapazitätsgrenze nähert:

$$\text{tatsächliche Fahrzeit} = \text{Normalfahrzeit} + \frac{S_{ij} \times (\text{Verkehrsfluss in Richtung } i \to j)}{1 - (\text{Verkehrsfluss in Richtung } i \to j)/\text{Kapazität}}$$

Wie schnell kann ein Auto von A nach D gelangen, wenn es sich allein auf den Straßen befindet? Was ist der größtmögliche Verkehrsfluss von A nach D (in Fahrzeugen pro Minute), den das Straßennetz aufnehmen kann? Wenn ein stetiger Verkehrsfluss von 4 Fahrzeugen pro Minute von A nach D aufrechterhalten werden soll, was ist dann der günstigste Verkehrsfluss, und wie lange dauert die Fahrt?

Nehmen wir an, dass jedes Fahrzeug autonom über seinen Route entscheidet. Das heißt, dass zum Beispiel ein Fahrer, der gewöhnlich die Route $ABCD$ nimmt und feststellt, dass die Route ABD (bei den gegebenen Verkehrsverhältnissen) schneller ist, am nächsten Tag auf die schnellere Route ausweichen wird. Dadurch wird natürlich die alte Route $ABCD$ entlastet und die neue Route ein wenig langsamer. Die Fahrzeuge werden so lange zwischen verschiedene Routen wechseln, bis sich ein *Gleichgewicht* einstellt: Die Fahrzeit auf jeder möglichen Route ist mindestens so groß wie die Fahrzeit auf allen Routen, die überhaupt benützt werden. Wie groß ist die Fahrzeit von A nach D bei einem Verkehrsfluss von 4 Fahrzeugen pro Minute im Gleichgewichtszustand? Wie ändert sich die Fahrzeit, wenn die Kapazität der Straße BC erhöht wird? Was ändert sich, wenn ein direkter Tunnel von A nach D mit Fahrzeit 5 Minuten, Kapazität 10 und Staufaktor 1,5 gebaut wird?

(Bei Bearbeitung der Aufgabe durch nur 3 Personen oder weniger kann eine Frage gestrichen werden.)

Modellierungsaufgabe 3 (für 1–2 Personen):
Mischung von Speiseöl

Zur Herstellung von Speiseöl der Marke „Osolemio" werden Rohöle raffiniert und verschnitten. Es stehen zwei Kategorien von Rohölen zur Verfügung.

- pflanzliche Öle: VEG1, VEG2.
- nichtpflanzliche Öle: OIL1, OIL2, OIL3.

Diese Ölsorten sind auf dem Markt zu folgenden Preisen (in Talern pro Tonne) erhältlich. Die Preise unterliegen monatlichen Schwankungen, liegen aber für einen beschränkten zeitlichen Horizont von einigen Monaten fest.

	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Jänner	110	120	130	110	115
Feber	130	130	110	90	115
März	110	140	130	100	95
Härte	8,8	6,1	2,0	4,2	5,0

Der Verkaufspreis des Endproduktes ist mit 150 Talern pro Tonne festgelegt. Pro Monat können höchstens 200 Tonnen pflanzliche und höchstens 250 Tonnen nichtpflanzliche Öle verarbeitet werden. Durch das Raffinieren entsteht kein Gewichtsverlust und die Verarbeitungskosten können vernachlässigt werden.

Es steht ein Lager für (höchstens) 1000 Tonnen je Rohöl zur Verfügung. Die Lagerkosten sind 5 Taler pro Tonne und Monat, unabhängig von der Rohölkategorie. Das Endprodukt kann nicht gelagert werden, sondern wird sofort zum Verkauf ausgeliefert. Sobald Rohöl raffinert worden ist, kann es nicht mehr gelagert werden.

Der Härtegrad des Speiseöls muss zwischen 3 und 6 der entsprechenden Einheit liegen. Die Härtegrade sind in der Tabelle zusammengefasst. Die Härte der Mischung ergibt sich linear aus der Härte der Rohölkomponenten.

Gesucht ist ein Einkaufsplan von Rohölen, und ein Produktionsplan, sodass der Gewinn maximiert wird.

Modellierungsaufgabe 4 (für 2–3 Personen):
Punktverteilungen mit kleinster Diskrepanz

Die *Diskrepanz* $\Delta^*(\mathcal{P})$ einer Menge $\mathcal{P}$ von Punkten $P_i = (x_i, y_i)$ im Einheitsquadrat $(i = 1, \ldots, n)$ ist das Supremum von

$$\left| \frac{|\{\, P_i : 0 \le x_i \le a,\ 0 \le y_i \le b,\, 1 \le i \le n \,\}|}{n} - a \cdot b \right|$$

über alle Rechtecke (a, b), $(0 \le a, b \le 1)$. Bestimmen Sie diejenige Punktmenge mit einer gegebenen Anzahl n von Punkten, die die Diskrepanz minimiert.

(Hinweis: Betrachten Sie einzeln jede der möglichen Permutation in der Reihenfolge der x-Koordinaten und der y-Koordinaten.)

Modellierungsaufgabe 5 (für 1–2 Personen):
Produktionsplanung mit ungewisser Zukunft

In einem Walzwerk, das Rollen und Schienen herstellt, soll für die kommenden vier Wochen ein Produktionsplan erstellt werden. In einer Stunde kann das Werk entweder 200 Tonnen Schienen oder 140 Tonnen Rollen herstellen.

Pro Woche stehen 40 Arbeitsstunden zur Verfügung, außer in der dritten Woche, wo wegen eines Feiertags nur 32 Stunden lang gearbeiten werden kann. Der maximale Bedarf an den beiden Produkten, der in jeder Woche verkauft werden kann, ist durch folgende Tabelle gegeben (in Tonnen):

Woche	1	2	3	4
Schienen	6000	6000	4000	6500
Rollen	4000	2500	3500	4200

Die Herstellung einer Tonne Schienen kostet 10 Taler, die Herstellung einer Tonne Rollen kostet 11 Taler. Es ist möglich, mehr als den augenblicklichen Bedarf zu produzieren und den Überschuss zu lagern; dies verursacht Lagerkosten von 2,5 Talern pro Woche für eine Tonne Schienen und 3 Taler pro Woche für eine Tonne Rollen. Zu Beginn sind 10 Tonnen Schienen auf Lager (und keine Rollen).

Der erzielbare Verkaufserlös ist ungewiss. Die Verkaufsabteilung zieht drei mögliche Preisentwicklungen in Betracht: (Die Preise sind in Talern pro Tonne algegeben.)

Variante 1.
günstige
Preisentwicklung

Woche	1	2	3	4
Schienen	25	26	27	27
Rollen	30	35	37	39

Variante 2.
mäßige
Preisentwicklung

Woche	1	2	3	4
Schienen	23	24	25	25
Rollen	30	33	35	36

Variante 3.
steigende Nachfrage
nach Schienen

Woche	1	2	3	4
Schienen	21	27	33	35
Rollen	30	32	33	33

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der drei Szenarien wird auf 0,45, 0,35 und 0,20 geschätzt. Der Produktionsplan für die erste Woche muss im Vorhinein festgelegt werden. Nach der ersten Woche ist die Preisentwicklung bekannt, und der Produktionsplan für die übrigen Wochen kann darauf Rücksicht nehmen.

Wie groß ist bei der optimalen Lösung der Gewinn, der sich bei Eintreten der verschiedenen Fälle erzielen lässt?

Modellierungsaufgabe 6 (für 2–3 Personen):
Optimales Morsealphabet

Für die 26 Buchstaben und den Zwischenraum soll ein neues Morse-Alphabet mit den Zeichen $\cdot$ und $-$ bestimmt werden. Dabei sollen die Buchstaben und Wörter nicht durch Pausen getrennt werden. Es ist daher ausgeschlossen, dass der Code für einen Buchstaben ein Anfangsstück einer Codes für einen anderen Buchstaben ist, wie etwa $\cdot-$ und $\cdot---\cdot$. Eine einfache Möglichkeit wäre etwa, eine Teilmenge aus den 32 Kombinationen von je 5 Zeichen auszuwählen. Der Code soll jedoch möglichst effizient gemacht werden, sodass ein durchschnittlicher englischer Text zur Übertragung möglichst wenig Zeit benötigt. Nehmen Sie an, dass das Zeichen $-$ doppelt so lang ist wie das Zeichen $\cdot$.

Für die englische Sprache sind folgende relativen Häufigkeiten der 26 Buchstaben und des Zwischenraumzeichens ermittelt worden (nach Häufigkeit sortiert, siehe L. Brillouin, *Science and Information Theory*, Academic Press, New York 1956, S. 52).

`Z`	0,0010	`G`	0,0110	`C`	0,0230	`N`	0,0590
`Q`	0,0010	`Y`	0,0120	`L`	0,0290	`A`	0,0630
`J`	0,0010	`W`	0,0120	`D`	0,0350	`O`	0,0654
`X`	0,0020	`P`	0,0175	`H`	0,0470	`T`	0,0720
`K`	0,0030	`M`	0,0210	`S`	0,0520	`E`	0,1050
`V`	0,0080	`U`	0,0225	`R`	0,0540	␣	0,2000
`B`	0,0105	`F`	0,0225	`I`	0,0550		

(Wenn Sie den Code für alle Buchstaben auf Grund des Beschränkungen der AMPL-Studentenversion nicht erstellen können, schränken Sie die Aufgabe auf die häufigeren Buchstaben ein.)

Modellierungsaufgabe 7 (für 1–2 Personen):
Produktionsplanung

Eine Maschinenfabrik erzeugt 4 Produkte PROD1, PROD2, PROD3 und PROD4. Die Firma verfügt über folgende Maschinen: 4 Schleifanlagen, 3 Metallfräsen, 1 Laserbohrer, 1 Hobelmaschine. Der Profit je produziertem Produkt (in Talern pro Stück), sowie die Arbeitsdauern auf den jeweiligen Maschinen (in Stunden pro Stück) ergeben sich aus folgender Tabelle.

	PROD1	PROD2	PROD3	PROD4
Profit	10	6	8	4
Schleifen	0,5	0,7	–	–
Fräsen	0,3	0,2	0,8	0,3
Bohren	0,05	0,03	–	0,07
Hobeln	–	–	0,01	0,05
Jänner	500	1000	300	300
Feber	600	500	200	0
März	300	600	0	0
April	200	300	400	500
Mai	0	100	500	100

Die Tabelle enthält weiters monatliche Absatzbeschränkungen für die einzelnen Produkte. Aufgrund von Reparatur- und Wartungsarbeiten sind in den angegebenen Monaten folgende Maschinen nicht verfügbar:

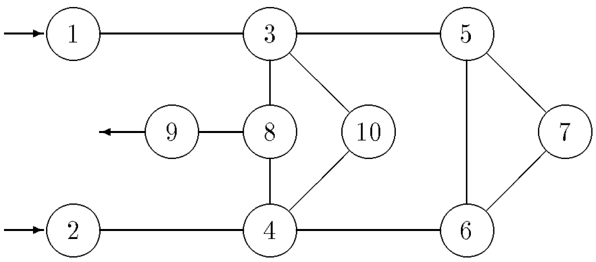
Jänner:	1	Metallfräse
Feber:	3	Schleifanlagen
März:	1	Laserbohrer
April:	2	Metallfräsen
Mai:	1	Hobelmaschine

Schließlich gibt es Platz für maximal 100 Stück eines jeden Produkts zu Lagerkosten von 0,05 Talern pro Monat und Stück. Augenblicklich liegt nichts auf Lager. Bis Ende Mai soll von jedem Produkt ein Lagerbestand von 50 Stück angelegt werden. Es kann ein Betrieb mit 24 Arbeitstagen je Monat zugrundegelegt werden. Pro Arbeitstag wird in zwei 8-Stunden Schichten produziert. (Die Reihenfolge der einzelnen Produktschritte kann bei der Modellierung außer Acht gelassen werden.)

Welche Produkte sollten in welchem Monat in welcher Menge produziert werden, um den Profit zu maximieren?

Modellierungsaufgabe 8 (für 1–2 Personen):
Druckausgleich in einem Rohrnetz

Ein Rohrnetz hat folgende Struktur:



Die Knoten 1 und 2 sind *Quellen*, bei denen der Fluss in das Rohrnetz eingeleitet wird, und Knoten 9 ist eine *Senke*, bei der der Fluss abfließt. Jeder Knoten i liegt auf der Höhe h_i, und es wird in diesem Knoten eine Menge w_i abgezapft.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_i	50	40	20	20	0	0	0	20	20	20
w_i	0	0	200	0	0	200	150	0	0	150

Durch die Rohre kann der Fluss in beiden Richtungen fließen. Natürlich muss in jedem Knoten die gesamte einmündende Flussmenge gleich der gesamten ausgehenden Flussmenge plus der abgezapften Menge sein. Wenn durch ein Rohr von i nach j eine Menge F fließt, dann muss der Druck im Knoten i um H_{ij} größer sein als im Knoten j, wobei

$$H_{ij} := Kc_{ij}F^2$$

ein Maß für die „Energie“ ist, die nötig ist, um den Fluss F durch das Rohr zu pumpen. Der Faktor $c_{ij} = c_{ji}$ hängt von der Reibung, der Länge und dem Querschnitt des Rohres ab, und $K = 4{,}96407 \times 10^{-6}$ ist eine Konstante, die den Druck in die Einheit von 1 m Höhenunterschied umrechnet.

i, j	c_{ij}
1 3	6,3668
2 4	28,8937
3 5	6,3668
3 8	43,3406
3 10	28,8937
4 6	28,8937
4 8	28,8937
4 10	28,8937
5 6	57,7874
5 7	43,3406
6 7	28,8937
8 9	705,2510

Der Druck an beiden Quellen und an der Senke soll auf einem Stand, der einer Flüssigkeitssäule von 200 m entspricht, gehalten werden. Berechnen Sie den Fluss unter diesen Restriktionen.

Modellierungsaufgabe 9 (für 1–2 Personen):
Transportoptimierung

Die Tullner Zuckerfabrik AG hat Fabrikstandorte in Tulln und in Kufstein. Zusätzlich existieren Zwischenlager in Wien, Gleisdorf, Wels und Innsbruck. Es werden 6 Großabnehmer A1, ..., A6 mit Zucker beliefert, wobei die Lieferung direkt ab Fabrik oder von den Zwischenlagern aus erfolgen kann. Die Lieferkosten in Schilling pro Tonne sind tabellarisch zusammengefasst. Ein „–“ bedeutet, dass zwischen den entsprechenden Stellen keine Lieferung erfolgen kann.

nach	von Tulln	von Kufstein
Wien	20	130
Gleisdorf	80	150
Wels	50	60
Innsbruck	120	10

	Tulln	Kufstein	Wien	Gleisdorf	Wels	Innsbruck	Bedarf	Präferenz
A1	50	–	20	–	30	–	50 000	Tulln
A2	–	40	100	–	–	20	20 000	Innsbruck
A3	30	–	40	–	50	–	60 000	egal
A4	80	50	–	90	60	90	35 000	egal
A5	–	–	90	20	110	–	70 000	Wien
A6	–	30	–	–	80	50	25 000	Innsbruck

Die monatliche Kapazität der Fabriken beträgt 200 000 Tonnen in Tulln und 150 000 Tonnen in Kufstein. Die Zwischenlager erlauben einen maximalen Durchsatz von folgenden Mengen in Tonnen je Monat.

Wien	Gleisdorf	Wels	Innsbruck
100 000	40 000	70 000	50 000

a) Welcher Verteilungsplan an die Kunden verursacht die geringsten Kosten?

b) Gibt es einen Verteilungsplan, bei dem alle Präferenzen der Großabnehmer berücksichtigt werden? Wenn, ja welcher dieser Pläne hat die geringsten Kosten?

Modellierungsaufgabe 10 (für 3–4 Personen):
Zugsplanung

Die GKB-Kohle AG betreibt eine große Kohlenkippe zur Beladung von Zügen. Wenn ein Kohlenzug ankommt, wird er von der Kippe beladen. Der normale Kohlenzug kann in 3 Stunden beladen werden, und die Kohlenkippe fasst 1,5 Zugladungen. An jedem Tag schickt die Bahngesellschaft 3 normale Züge, die zwischen 5 Uhr und 20 Uhr ankommen. Jeder Zug hat drei Lokomotiven. Wenn ein Zug ankommt und bis zum Beginn des Ladevorganges warten muss, verrechnet die Bahn eine *Standgebühr* von 50 000 S pro Stunde für jede Lokomotive. Zusätzlich gibt es einen Extrazug, der einmal jede Woche donnerstags zwischen 11 und 13 Uhr ankommt. Dieser Zug hat fünf Lokomotiven und fasst die doppelte Menge eines Standardzuges.

Die leere Kohlenkippe kann von einer einzelnen Mannschaft in 6 Stunden direkt aus dem Kohlenabbau gefüllt werden. Der Einsatz dieser Mannschaft kostet 90 000 S pro Stunde. Um die Füllzeit zu halbieren, kann eine zweite Mannschaft um 120 000 S pro Stunde eingesetzt werden. Aus Sicherheitsgründen kann nicht gleichzeitig ein Zug beladen werden, während die Kohlenkippe gefüllt wird. Wenn das Laden eines Zuges unterbrochen wird, um die Kohlenkippe zu füllen, fallen Standgebühren an.

Wie groß sind die durchschnittlichen jährlichen Betriebskosten für die Kohlenkippe? Wie oft soll die zweite Mannschaft eingesetzt werden? Wie groß ist die mittlere Standgebühr pro Monat? Wenn man die genauen Ankunftszeiten der Standardzüge bestimmen könnte, für welche Zeit sollte man sie dann planen? Würde eine dritte Füllmannschaft um den Preis von 120 000 S pro Stunde die jährlichen Kosten wesentlich reduzieren? Kann die Kohlenkippe einen vierten täglichen Standardzug verkraften?

(Bei Bearbeitung der Aufgabe durch nur 3 Personen kann eine Frage gestrichen werden.)

Modellierungsaufgabe 11 (für 2–3 Personen):
Zuordnung von Projekten

Im Studienjahr 1999 müssen die Studierenden der Vorlesung *Mathematische Optimierung* Programmierprojekte bearbeiten. Nach Durchsicht der 11 zur Auswahl stehenden Projekte haben die 11 Studentinnen und Studenten ihre Präferenzen kundgetan: (Die am meisten bevorzugten Projekte stehen zuerst in der Liste.)

Auzelitsch	P_{11}, P_{10}, P_9, P_7, P_8, P_1, P_4, P_3, P_2, P_6, P_5.
Bricker	P_7, P_{10}, P_{11}, P_9, P_8, P_4, P_3, P_2, P_5, P_6, P_1.
Derler	P_4, P_7, P_{10}, P_{11}, P_5, P_6, P_8, P_9, P_1, P_2, P_3.
Flack	P_7, P_{10}, P_{11}, P_9, P_6, P_5, P_8, P_3, P_2, P_4, P_1.
Korimori	P_7, P_2, P_1, P_9, P_8, P_{10}, P_{11}, P_3, P_4, P_5, P_6.
Koschier	P_{10}, P_{11}, P_5, P_6, P_4, P_7, P_8, P_9, P_2, P_3, P_1.
Krottmann	P_7, P_8, P_{11}, P_{10}, P_9, P_1, P_6, P_5, P_4, P_3, P_2.
Panzenböck	P_7, P_{10}, P_{11}, P_3, P_2, P_4, P_5, P_6, P_8, P_9, P_1.
Rauch	P_{10}, P_{11}, P_8, P_9, P_6, P_5, P_7, P_4, P_2, P_3, P_1.
Tippler	P_{11}, P_{10}, P_6, P_5, P_1, P_2, P_7, P_4, P_3, P_8, P_9.
Watzanzakis	P_{11}, P_{10}, P_7, P_4, P_6, P_5, P_9, P_3, P_2, P_8, P_1.

Es darf aber jedes Projekt nur von einer Person bearbeitet werden. Wie soll die Zuordnung zu Projekten möglichst gerecht getroffen werden, sodass alle zufrieden sind?

Wie kann man das Modell erweitern und zum Beispiel die Wünsche höhersemestriger Studentinnen und Studenten stärker berücksichtigen?

Modellierungsaufgabe 12 (für 2–3 Personen):
Gemischte Arbeitsgruppen

Der Senat der Erzherzog-Johann-Universität möchte Programmrichtlinien für die langfristige Entwicklung der Universität festlegen. Da der Senat zu groß ist, um wirklich produktive Diskussionen zustandekommen zu lassen, wollen die Mitglieder in kleineren Arbeitsgruppen vorbereitend diskutieren, bevor sie sich im Plenum treffen. Da auch in kleinen Gruppen das Risiko besteht, dass eine dominierende Persönlichkeit die Gesprächsrichtung vorgibt und die Diskussion steuert, sollten mehrere Sitzungen stattfinden, in denen die teilnehmenden Personen gemischt werden.

An einem ganzen Tag sollen drei Vormittagssitzungen und vier Nachmittagssitzungen zu je 45 Minuten Dauer abgehalten werden, die zu jeder vollen Stunde von 10 bis 17 Uhr beginnen, mit einer Mittagspause um 1 Uhr. In jeder Vormittagssitzung sollen sich sechs Gruppen treffen, die von einem der fünf Dekane beziehungsweise vom Rektor geleitet werden. Das heißt, dass jede dieser Personen drei Sitzungen leitet. Diese sechs Personen nehmen an dem Nachmittagssitzungen nicht mehr teil. In jeder der vier Nachmittagssitzungen werden nur mehr vier Arbeitsgruppen gebildet.

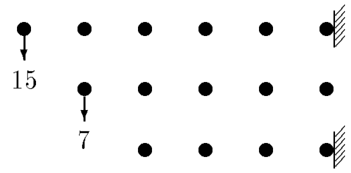
Neben den Dekanen und dem Rektor haben sich 29 Senatsmitglieder zur Teilnahme angemeldet, davon 20 Mitglieder aus der Reihe der Professoren. Diese Teilnehmerinnen und Teilnehmer sollen nun auf die Arbeitsgruppen in den insgesamt sieben Sitzungen aufgeteilt werden. Dabei sollten die Mitglieder möglichst gut durchgemischt werden. Idealerweise sollte jede Person mit jeder anderen Person gleich häufig einer gemeinsamen Arbeitsgruppe angehören, während die Überschneidung von Arbeitsgruppen in verschiedenen Sitzungen möglichst klein sein soll. Außerdem sollte in den Vormittagssitzungen kein Mitglied an zwei Sitzungen unter dem gleichen Diskussionsleiter teilnehmen, und keine Arbeisgruppe sollte einen unverhältnismäßigen Anteil an Professoren enthalten.

Erstellen sie einen Plan für die Mitglieder 1–20 und 21–29 sowie für die Dekane und den Rektor. Wie gut sind die oben angegebenen Kriterien erfüllt?

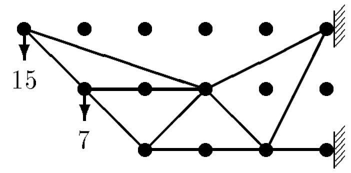
Berücksichtigen Sie auch, dass TeilnehmerInnen im letzen Augenblick absagen könnten oder dass sich eventuell noch zusätzliche TeilnehmerInnen anmelden. Wie weit kann Ihr Modell auch für andere Treffen mit einem anderen Teilnehmerkreis und anderen Gruppierungen eingesetzt werden?

Modellierungsaufgabe 13 (für 2–3 Personen):
Mechanische Optimierung

Ein *ebenes Stabwerk* besteht aus (punktförmigen) *Gelenken* und geraden *Stäben*, die als Strecken zwischen den Gelenken verlaufen. Für die folgenden gitterförmig angeordneten Gelenke soll ein Stabwerk mit geringstem Gewicht bestimmt werden, das die angegebenen senkrechten *äußeren Kräfte* von 15 und 7 aushält, wobei der rechte obere und der rechte untere Eckpunkt fixiert ist.



Eine mögliche Lösung könnte zum Beispiel folgende Struktur haben:



Die Stäbe übertragen Zug- oder Schubkräfte zwischen den Gelenken. Die Kräfte, die ein Stab auf seine Endpunkte ausübt, sind einander entgegengesetzt und parallel zur Richtung des Stabes. Das Stabwerk muss im *Gleichgewicht* sein: Die in einem nicht fixierten Knoten zusammenlaufenden Kräfte müssen die Vektorsumme 0 ergeben, beziehungsweise eine Vektorsumme, die der äußeren Kraft im jeweiligen Knoten entgegengesetzt ist. Damit der Stab die Kraft aushält, muss sein Querschnitt proportional zur Kraft sein. Sein Gewicht ist also proportional zum Produkt aus der übertragenen Kraft und seiner Länge.

Vernachlässigen Sie, dass das Stabwerk auch sich selbst (als zusätzliches Gewicht) tragen muss. Wie andert sich die Lösung, wenn das Stabwerk nur eine der beiden äußeren Kräfte tragen muss?

Modellierungsaufgabe 14 (für 2–3 Personen):
Personalplanung

Der Autoproduzent „Silberpfeil" will seine Personalpolitik auf zukünftige Marktentwicklungen und Produktionsmethoden anpassen. Folgende Trends sollen dabei berücksichtigt werden: Aufgrund moderner Produktionsmethoden wird der Bedarf an ungelernten Arbeitern sinken, aber der Bedarf an Arbeitern mit Berufsausbildung, und an Professionisten steigen. Weiters ist aufgrund der Marktsättigung an Autos mit rückläufigen Verkaufszahlen zu rechnen, sodass insgesamt folgender Bedarf an Personal für die nächsten drei Jahre prognostiziert wird.

		ungelernt	gelernt	Profess.
Personal	derzeitiger Stand	2000	1500	1000
	Jahr 1	1000	1400	1000
	Jahr 2	500	2000	1500
	Jahr 3	0	2500	2000
Fluktuation	im ersten Dienstjahr	25 %	20 %	10 %
	$\geq$ 1 Dienstjahr	10 %	5 %	5 %
Neueinstellungen	pro Jahr	500	800	500
Überschuss	Kosten	$ 1500	$ 2000	$ 3000
Kurzarbeit	Kosten	$ 500	$ 400	$ 400

Erfahrungsgemäß ergibt sich eine Personalfluktuation durch Ausscheiden von Mitarbeitern. Die größte Fluktuation tritt dabei im ersten Arbeitsjahr auf. Alle zur Zeit beschäftigten Mitarbeiter sind bereits länger als ein Jahr beschäftigt. Die Fluktuationsrate findet sich in der Tabelle. Die Beschäftigtenpolitik wird an folgenden Kriterien ausgerichtet.

Personalaufnahme. Eine beschränkte Anzahl von Neueinstellungen ist pro Jahr möglich.

Umschulung. Es ist möglich, pro Jahr 200 ungeschulte Arbeiter auf Schulung für eine Berufsausbildung zu senden. Dies kostet 400 Taler pro Person. Weiters besteht die Möglichkeit, Arbeitskräfte mit Berufsausbildung zu Professionisten weiterzubilden. Die Anzahl darf allerdings höchstens 25% der Gesamtanzahl an Professionisten betragen. Die Mannkosten belaufen sich dabei auf 300 Taler pro Jahr. Es ist weiters möglich, Personal unter seiner Qualifikation einzusetzen. Allerdings kündigen 50% dieser Personen. Der Firma entstehen dadurch keine Kosten.

Überbesetzung. Der Betriebsrat hat mit dem Vorstand ausgehandelt, dass maximal 150 Arbeitskräfte gehalten werden können, auch wenn sie nicht gebraucht werden. Die zusätzlichen Kosten pro Person und Jahr sind in der Tabelle angegeben.

Kurzarbeit. Schließlich ist es möglich, in jeder Kategorie bis zu 50 Personen auf Kurzarbeit zu setzen. Die zusätzlichen Kosten finden sich in der Tabelle. Ein Arbeiter auf Kurzarbeit leistet die Hälfte eines normal Beschäftigten.

Bestimmen Sie eine Personalpolitik, bei der die entstehenden Kosten minimiert werden.