

Graphentheorie

Ralph-Hardo Schulz

FU Berlin, 2000/2005², Stand 19. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierungen durch Graphen	1
1.1 Wege in Graphen	1
1.1.1 Königsberger Brückenproblem	2
1.1.2 Problem des Fährmanns	3
1.1.3 Routenplanung (Transportprobleme)	3
1.1.4 Kettencode und Hamiltonscher Weg	5
1.1.5 Wahrscheinlichkeiten und Bäume	5
1.1.6 Präzisierung graphentheoretischer Begriffe	8
1.2 Beispiele von Graphen	9
1.2.1 Vollständige Graphen	9
1.2.2 Bipartite Graphen	10
1.2.3 Kreise	10
1.2.4 Bäume	11
1.2.5 Der Petersen-Graph	12
1.3 Planarität von Graphen	12
1.3.1 Kreuzungsfreie Leitungen	12
1.3.2 Definition und Eigenschaften ebener Graphen	14
1.3.3 Platonische Körper	15
1.4 Matchings	17
1.4.1 Job-Vergabe	17
1.4.2 Definition Matching	17
1.4.3 Party- und Heiratsprobleme	18
1.5 Färbungen von Graphen	19
1.5.1 Ampelphasen und chromatische Zahlen	19
1.5.2 Definitionen zu Färbungen von Graphen	20
1.5.3 Terminplanung und Färbung von Graphen	20

1.5.4	Ausleuchten von Räumen und Färbungen	20
1.5.5	Färbung von Landkarten und dualen Graphen	21
1.6	Übungsaufgaben zu Kap. 1	22
2	Veranschaulichungen durch Graphen	25
2.1	Relationen	25
2.1.1	Graph einer Relation	25
2.1.2	Ordnungsdiagramm/Hassediagramm	26
2.2	Wortmengen und Bäume	27
2.3	Mengensysteme und bipartite Graphen	30
2.3.1	Mengensystem und Inzidenzgraph	30
2.3.2	Transversalen, Vertretersysteme	30
2.3.3	Definition: Partielle Transversale	31
2.4	Schubfachprinzipien	32
2.4.1	Das (klassische) Schubfachprinzip	32
2.4.2	Anwendungsbeispiele	33
2.4.3	Monochromatische Dreiecke bei Kantenfärbungen	33
2.5	Übungsaufgaben zu Kap. 2	36
3	Flüsse und Transversalen	39
3.1	Flüsse in Netzwerken	39
3.1.1	Definitionen und erste Ergebnisse	39
3.1.2	Maximum-Fluss–Minimum-Schnitt-Satz	42
3.1.3	Verbesserung von Flüssen	43
3.1.4	Minimale Schnitte und optimale Flüsse	46
3.1.5	Anwendungsbeispiel: Angebot- und Nachfrage-Netzwerk	48
3.2	Übertragung auf Wegesysteme	49
3.2.1	Definition: Trennende Kanten und disjunkte Wegesysteme	49
3.2.2	Übertragung der Flusstheorie in die Sprache der Wegesysteme	49
3.2.3	Verwandlung eines eckendisjunkten Wege- systems in ein kantendisjunktes	50
3.3	Vertretersysteme	52
3.3.1	Anwendung des Satzes von Menger	52

3.3.2	Zu partiellen Transversalen	53
3.3.3	Anwendung auf Mengensysteme	55
3.3.4	Einkleidungen zu Vertretersystemen	55
3.4	Von Matrizen zu bipartiten Graphen	57
3.4.1	Übertragung auf Matrizen	57
3.4.2	Anwendungs-Beispiele	59
3.5	Das Dimer-Problem*	60
4	Noch nicht geschriebes Kapitel:	
	Bäume	65
4.1	Elementare Eigenschaften und Anzahlen	65
4.2	Aufspannende Bäume in ungerichteten Graphen	65
4.3	Minimale aufspannende Bäume in gewichteten Graphen	65
4.4	Kürzeste Wege in Graphen	65
4.5	Codebäume	65
4.6	Binäre Suchbäume	65
5	Noch nicht geschriebenes Kapitel:	
	Färbungen	67
5.1	Knotenfärbungen und Schranken	67
5.2	Listenfärbungen und der 5-Farbensatz	67
5.3	Perfekte Graphen	67
5.4	Das chromatische Polynom	67
6	Noch nicht geschriebenes Kapitel:	
	Diverses	69
6.1	Eulersche und Hamiltonsche Graphen	69
6.2	Graphen-Minoren	69
6.3	Turans Graphen-Satz	69

Kapitel 1

Beispiele von Modellierungen durch Graphen

1.1 Wege in Graphen

In den folgenden Beispielen lässt sich ein Problem durch Darstellung der relevanten Übergänge zwischen räumlichen Gegebenheiten oder zwischen Zuständen in ein Wegeproblem in Graphen übersetzen und damit leichter lösen.

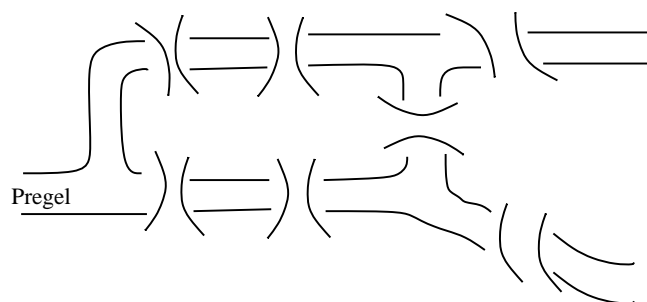


Abbildung 1.1: Zum Königsberger Brückenproblem

1.1.1 Königsberger Brückenproblem (Euler 1736)

Kann man bei einem Spaziergang durch die Stadt (s. Abbildung 1.1) jede Brücke genau einmal betreten und zum Ausgangspunkt zurückkommen?

Lösung: Ein solcher Spaziergang ist nicht möglich: Wir abstrahieren aus der geographischen Lage einen Graphen (zur Definition s. 1.1.6), in dem die Stadtteile durch 'Knoten' und die Wege über Brücken durch 'Kanten' dargestellt sind (s. Abbildung 1.2). Gäbe es den gesuchten Weg, so müsste jeder Kante, die in einer Ecke mündet, genau eine von ihr weggehende Kante entsprechen. Die Anzahl der Kanten durch eine Ecke (der Eckengrad) wäre also stets gerade; dies ist hier nicht der Fall.

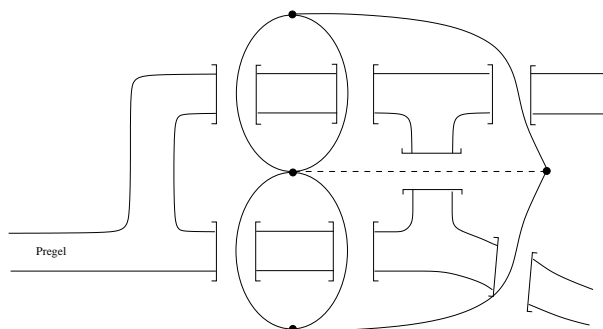


Abbildung 1.2: Graph zum Königsberger Brückenproblem

Verallgemeinerung: Frage nach einem Kantenzug (s. 1.1.6d), der genau einmal durch jede Kante führt und an seinem Ausgangspunkt endet (*Eulersche Tour*, "Briefträgertour"), auch in anderen Graphen.

Weitere wichtige Fragestellungen sind Fragen nach einem geschlossenen Weg (s. 1.1.6), der alle Ecken eines Graphen enthält; ein solcher Kreis heißt *Hamiltonscher Kreis* oder *Rundreise*; wir behandeln dazu ein Beispiel in 1.1.4.

Zunächst jedoch zu folgender scherzhaften Knobelaufgabe und anderen Transportproblemen:

1.1.2 Problem des Fährmanns

Ein Fährmann (F) kann mit seinem Boot nur ein Tier oder einen Gegenstand befördern. Er soll von einem Ufer zum anderen einen Wolf (W), eine Ziege (Z) und einen Kohlkopf (K) transportieren (vgl. [Jaeg]). Dabei dürfen Wolf und Ziege sowie Ziege und Kohlkopf nicht allein gelassen werden.

Eine *Lösung* ergibt sich durch Betrachtung des Graphen der möglichen Zustände am Ausgangs-Ufer (als Ecken) und der erlaubten Übergänge (als Kanten), s. Abbildung 1.3.

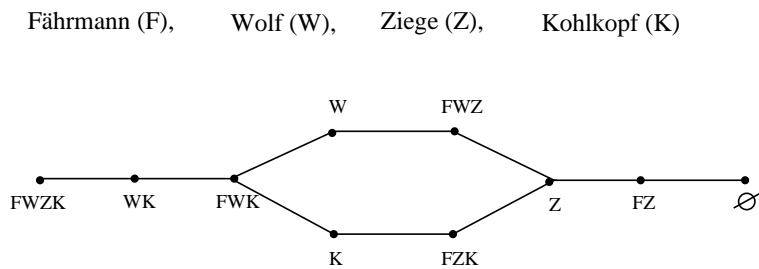


Abbildung 1.3: Zum Problem des Fährmanns

1.1.3 Routenplanung (Transportprobleme)

Gesucht ist zum Beispiel der billigste Weg vom Standort ① zu den Bestimmungspunkten ⑨ und ⑩ in dem Wegesystem von Abbildung 1.4. Die den Wegen entsprechenden Kanten sind mit den jeweiligen Kosten gewichtet.

Ähnlich kann man nach einem maximalen Fluss (s.u. 3.1) in einem Pipeline- oder einem Datenübertragungs- System gemäß Abbildung 1.4 fragen; die Gewichte der Kanten bezeichnen dann z.B. Kapazitäten der betreffenden Pipeline bzw. Daten-Leitung. Die Einführung einer virtuellen "Supersenke" erleichtert manchmal die Berechnung.

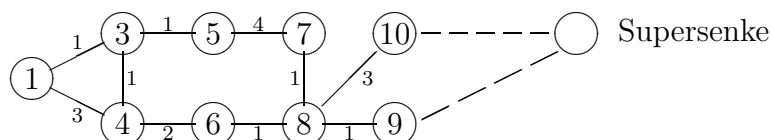


Abbildung 1.4: Beispiel eines Transportproblems

Problem des Handlungsreisenden

Bei diesem Problem (Travelling Salesman Problem, TSP) fragt man nach einer kürzesten Rundreise durch n Städte (also mit Rückkehr in den Ausgangsort).

Hierbei werden je zwei Knoten (Städte) durch eine Kante verbunden, die mit der Entfernung der betreffenden Städte gewichtet wird. Gesucht ist dann ein geschlossener Kantenzug, der durch jeden Knoten führt und minimale Gewichts-Summe hat.

Anmerkung:

Zur algorithmischen Lösung des TSP gab es Wettbewerbe, mit steigender Städte-Anzahl. Auf der TSP-Homepage <http://www.tsp.gatech.edu/> findet man viele Beiträge zur Geschichte des TSP, u.a. Bilder von optimalen Rekord-Touren, z.B. durch 33 amerikanische Städte im Jahr 1954, durch 120 westdeutsche Städte 1977 (M.Grötschel), durch 666 Städte in der ganzen Welt im Jahr 1987 (M.Grötschel und O.Holland) oder durch 24.978 schwedische Städte 2004.

Problem des chinesischen Postboten

Ein Postbote soll in seinem Auslieferungsbezirk (Wegesystem) alle Straßen (Kanten) durchlaufen, wobei er im Postamt (Ecke u_0) startet und zu dieser wieder zurückkehrt. Die Kanten des zugeordneten Graphen sind gewichtet mit nicht-negativen reellen Zahlen, die die den Zeitaufwand oder die Länge der Straße messen (Kostenfunktion). Gesucht ist ein Rundgang minimaler Gesamtkosten. (In Kapitel 6 werden wir auf dieses

Problem näher eingehen.) ¹

1.1.4 Kettencode und Hamiltonscher Weg

Gesucht ist ein k -stelliger binärer *Kettencode*; darunter versteht man ein m -Tupel ("Wort") $a_0 \dots a_{m-1}$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ derart, daß beim zyklischen Durchlaufen der k -Tupel (– einem Ablesefenster entsprechend –), also unter den "Wörtern" $a_i a_{i+1} \dots a_{i+k}$ (mit $i+j$ reduziert modulo m), alle Elemente von $\{0, 1\}^k$ genau einmal auftreten.

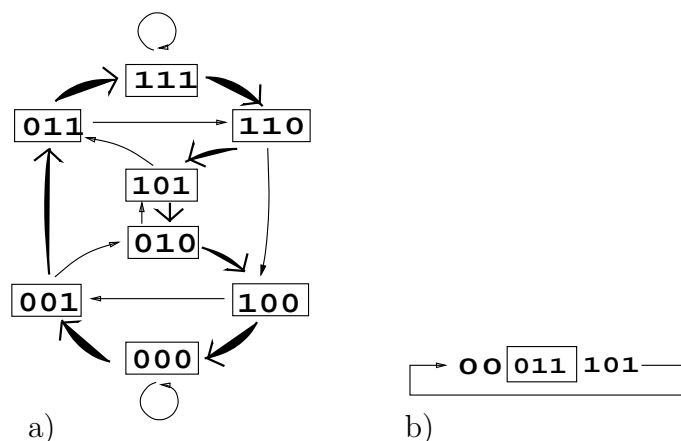


Abbildung 1.5: a) Hamiltonscher Weg im Übergangsdiagramm zu einem Kettencode b) Ablesen der Tripel mittels eines Fensters

Zum *Beispiel* erhält man im Übergangsdiagramm (Streichen des ersten Bits und Anhängen einer 1 oder einer 0) der dreistelligen binären Wörter, einem sogenannten deBruijn-Graphen, s. Abb. 1.5a, einen 3-stelligen Kettencode durch einen geschlossenen *Hamiltonschen Weg*, d. h. einen geschlossener Weg, der jede *Ecke* genau einmal trifft.

1.1.5 Wahrscheinlichkeiten und Bäume

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Werfen mit einer idealen Münze genau einmal „Zahl“ zu erhalten?

¹Das Problem wurde 1962 von dem chinesischen Mathematiker Guan Meigu gestellt, dem zu Ehren es Problem des *chinesischen* Postboten heißt.

Eine beliebte Möglichkeit, solche und ähnliche Aufgaben zu lösen, ist die Darstellung der Versuchs-Ausgänge (hier der Ergebnisse des 1. Wurfes durch die erste Verzweigung und die des 2. Wurfes für die Verzweigungen auf dem zweiten „Niveau“) mittels eines „Ereignisbaumes“ (s. Abb. 1.6; zum Begriff „Baum“ s. 1.2.4).

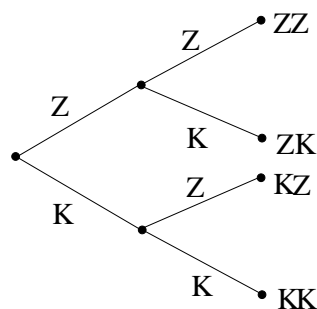


Abbildung 1.6: Ereignisbaum des 2-maligen Münzwurfs

Gemäß den elementaren Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich die „Zweige“ des Baumes mit Wahrscheinlichkeiten gewichten (s. Abb. 1.7). Man erhält einen sogenannten **Wahrscheinlichkeitsbaum**.

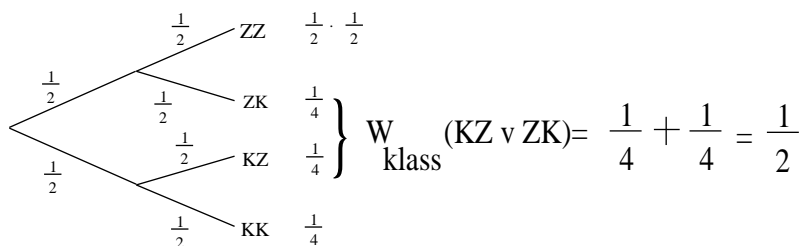


Abbildung 1.7: Zugehöriger Wahrscheinlichkeitsbaum

Nach den *Pfadregeln* werden zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Blattes die Wahrscheinlichkeiten der Kanten des Weges von der

”Wurzel” zum Blatt multipliziert und zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Menge von Blättern die Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Blätter additiert.

Ähnliche Aufgabenstellungen: Mendelsche Vererbung eines Merkmals (s. [En]). Wir betrachten ein Gen mit 2 Allelen (Ausprägungen) A, a . Bezüglich dieses Genes gibt es die Genotypen AA, Aa, aa . Bei der Entstehung eines Nachkommens wird, so das Modell, der Genotyp zufällig aus je einem Gen der Eltern gebildet. Für die Kreuzung $Aa \times Aa$ ergibt sich der Baum von Abb. 1.8.

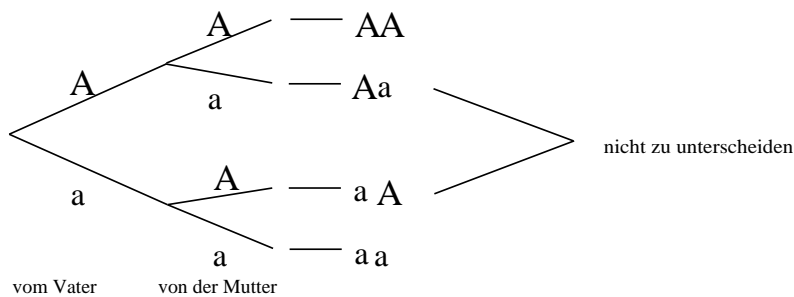


Abbildung 1.8: Baum zur Mendelschen Vererbung

1.1.6 Präzisierung graphentheoretischer Begriffe

a) Definition **Graph**: Ein (ungerichteter) *Graph* $G(V, E)$ besteht aus einer Menge $V = V(G)$ von so genannten *Ecken* oder *Knoten* (engl. vertex set)² und einer (Multi-)Menge³ $E = E(G)$ von so genannten *Kanten* (engl. edge set), wobei jede Kante aus zwei (möglicherweise gleichen) Ecken besteht; die Kante $e = \{u, v\}$ mit den "Endecken" u und v schreiben wir auch in der Form $e = uv$ und nennen u und v *benachbart* oder *adjacent* (engl. adjacent). Wir behandeln hier meist nur endliche Graphen, also solche mit $|V(G)| < \infty$.

Ein Graph $G(V', E')$ heißt **Untergraph** von $G(V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt.

b) Definition **Einfacher Graph**: Ist in einem Graphen $e = uv$ eine Kante mit $u = v$, so spricht man von einer *Schleife* (engl. loop). Werden gewisse Kanten eines Graphen G mehrfach gezählt, ist also E genauer eine Multimenge, so heißen Kanten mit den gleichen Endpunkten *parallele Kanten* oder *Mehrfachkanten*. Ein Graph ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten ist ein *einfacher Graph*; andernfalls spricht man auch von einem *Multigraphen*. Für einen einfachen Graphen ist $E \subseteq \binom{V}{2}$, also E eine Menge von 2-Teilmengen von V .

c) Der **Grad** $d(v)$ einer Ecke v ist die Anzahl der Kanten mit Endecke v ; dabei werden Schleifen doppelt gezählt. In einem einfachen Graphen entspricht der Grad einer Ecke der Anzahl ihrer Nachbar-Ecken.

d) Definition **Kantenzug, Weg, Kreis**: Ein *Kantenzug* (engl. walk) der *Länge* n besteht aus einer Folge $u_1 k_1 u_2 k_2 \dots k_n u_{n+1}$ von Ecken u_i und Kanten k_i mit $k_i = u_i u_{i+1}$. Sind die Ecken eines Kantenzugs außer evtl. u_1 und u_{n+1} verschieden, so sprechen wir von einem *Weg* (engl. path); ein *Kreis* oder *geschlossener Weg* ist ein Weg mit $u_1 = u_{n+1}$. (Zu Beispielen von Kreisen siehe Abb. 1.11.) Ein Weg bzw. Kreis *in einem Graphen* G ist ein Untergraph von G , der Weg bzw. Kreis ist.

Für einfache Graphen reicht die Angabe $u_1 u_2 \dots u_{n+1}$ der Ecken eines Weges, da diese die n Kanten eindeutig bestimmen.

²Eine Multimenge ist eine Menge, deren Elementen jeweils Vielfachheiten zugeordnet sind; in unserem Fall beschreibt das die Möglichkeit von mehrfachen Kanten zwischen zwei Ecken.

³Der Begriff "Ecke" wird wohl mehr von Mathematikern, der Terminus "Knoten" von Informatikern verwendet. Wir verwenden hier überwiegend "Ecke", aber gelegentlich auch "Knoten" (u.a. zur Unterscheidung vom Begriff n -Eck).

e) Definition **Zusammenhang**: Eine Ecke $v \in V(G)$ ist von $u \in V(G)$ *erreichbar*, falls es in G einen Weg von u nach v (kurz einen uv -Weg) gibt. Die Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $V(G)$. Besteht die Eckenmenge nur aus einer Klasse, ist also jede Ecke von G von einer festen Ecke und damit von jeder anderen Ecke aus erreichbar, so heißt G *zusammenhängend*.

f) Definition **Isomorphie**: Zwei Graphen $G(V, E)$ und $G'(V', E')$ heißen *isomorph*, wenn es Bijektionen $V \rightarrow V'$ und $E \rightarrow E'$ gibt, die die Inzidenz zwischen Kanten und Ecken erhalten. Z.B. sind je zwei vollständige Graphen (s. 1.2.1 a) auf n Ecken isomorph, weswegen man dann von *dem* vollständigen Graphen K_n sprechen kann. Ebenso ist ein Kreis C_n auf n Ecken bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (s. 1.2.3).

g) Definition **Gerichteter Graph, Digraph**: Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph* $\vec{G}(V, E)$ besteht aus einer Eckenmenge $V(\vec{G})$ und einer Teilmenge (bzw. Multi-Teilmenge) $E(\vec{G})$ von K^2 ; jede Kante ist also ein geordnetes Paar $e = (u, v) =: u \rightarrow v$ und hat eine Richtung von u nach v , oft durch einen Pfeil veranschaulicht; dabei heißt $u =: e^-$ Anfangsecke und $v = e^+$ die Endecke von e . (Als Beispiel kann der Graph von Abbildung 1.5 dienen.) Entfernt man die Orientierung der Kanten eines Digraphen \vec{G} , so erhält man den zugrundeliegenden ungerichteten Graphen von \vec{G} , der möglicherweise parallele Kanten besitzt.

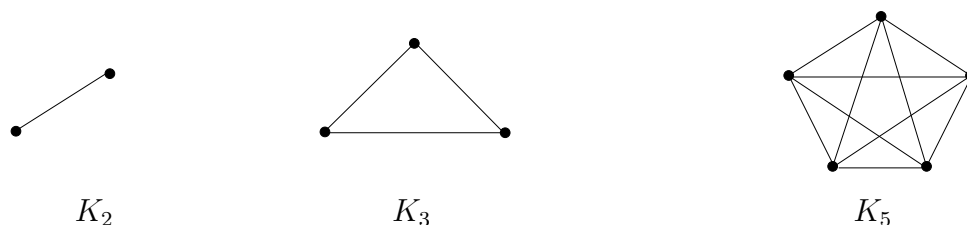
Die meisten Definitionen von ungerichteten Graphen können sinngemäß auf gerichtete Graphen verallgemeinert werden. Z.B. ist ein *gerichteter Weg* eine Folge von Kanten $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \cdots \rightarrow v$ mit paarweise disjunkten Ecken (außer evtl. mit $u = v$).

1.2 Beispiele von Graphen

Wir unterbrechen die Behandlung von Modellierungen, um einige wichtige Beispiele von Graphen einzuführen.

1.2.1 Vollständige Graphen

Ist V eine Menge der Mächtigkeit n und $E = \binom{V}{2}$, ist also jede mögliche Kante vorhanden, so heißt $G(V, E)$ *vollständiger Graph* und wird mit K_n bezeichnet. Bis auf Isomorphie ist K_n eindeutig bestimmt. Beispiele: K_2, K_3, K_5 sind in Abbildung 1.9 dargestellt, K_4 in Abbildung 1.15.

Abbildung 1.9: Die vollständigen Graphen K_2 , K_3 und K_5

1.2.2 Bipartite Graphen

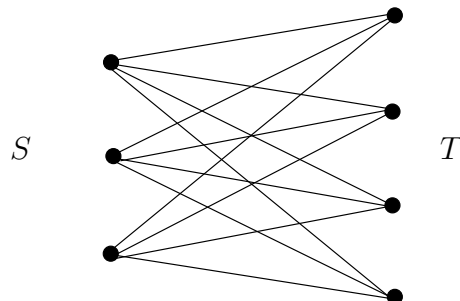
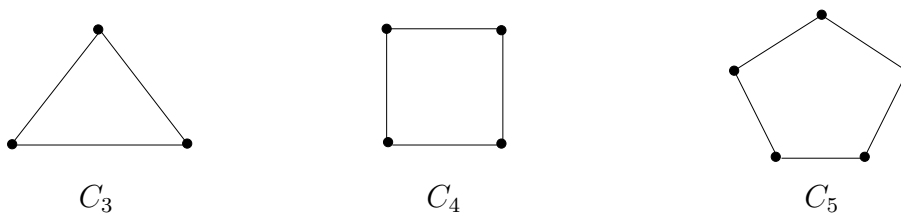
a) Definition **bipartiter Graph**: Ein einfacher Graph G heißt *bipartit*, falls $V(G) = S \dot{\cup} T$ die Vereinigung zweier disjunkter Mengen ist derart, daß jede Kante aus jeder der beiden Mengen eine Ecke besitzt, also von der Form $e = uv$ mit $u \in S$ und $v \in T$ ist. Die Elemente von S sind dann nicht zueinander benachbart, ebenso diejenigen von T .

Beispiele: Die vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$ (s. Teil b), unter ihnen der GWE-Graph $K_{3,3}$ (s. Abb. 1.13 und 1.14) und $K_{3,4}$ (s. Abb. 1.10) und ihre Untergraphen (z.Bsp. der Graph von Abbildung 1.17) sind bipartit, außerdem der Skelettgraph des Würfels (s. Abb. 1.16).

b) Ist in einem bipartiten Graphen $V(G) = S \dot{\cup} T$ und $E(G) = \{uv | u \in S, v \in T\}$, existieren also alle für einen bipartiten Graphen mögliche Kanten, so heißt dieser **vollständiger bipartiter Graph**; ist $|S| = m$ und $|T| = n$, so wird er mit $K_{m,n}$ bezeichnet. Bis auf Isomorphie gibt es nur einen vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$.

1.2.3 Kreise

Was man in der Graphentheorie unter einem Kreis versteht, wurde bereits in 1.1.6 d) definiert. Die Kreise C_3 , C_4 und C_5 der Länge 3, 4 bzw. 5 sind in Abbildung 1.11 dargestellt.

Abbildung 1.10: Der vollständige bipartite Graph $K_{3,4}$ Abbildung 1.11: Die Kreise C_3 , C_4 , und C_5

1.2.4 Bäume

a) Definition **Baum**: Ein Graph G , der keinen Kreis als Untergraphen enthält, heißt *zyklenfrei* oder **Wald** (engl. forest); ein **Baum** (engl.: tree) ist ein zusammenhängender zyklenfreier Graph, ein **Blatt** (engl. leaf) ist eine Ecke vom Grad 1; die Kanten eines Baumes heißen auch *Zweige*. Ein Wald ist also ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind. Ein Baum mit **Wurzel** (*Wurzelbaum*) ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten.

b) Definition **aufspannender Baum**: Ein *aufspannender Untergraph* eines Graphen G ist ein Untergraph mit Eckenmenge $V(G)$, ein *aufspannender Baum* ein aufspannender Untergraph, der Baum ist.

c) Die kürzeste Länge eines u, v -Weges für Ecken u, v heißt **Abstand** von u, v und wird mit $d(u, v)$ bezeichnet; existiert kein solcher Weg, so setzt man $d(u, v) = \infty$.

Durch den Abstand der Knoten eines Wurzelbaums von der Wurzel lassen sich den Knoten *Niveaus* zuordnen (Niveau n : Menge der Knoten vom Abstand n von der Wurzel für $n = 0, 1, 2, \dots$) und den Kanten Richtungen (von der Wurzel her in Richtung Blätter) geben.

1.2.5 Der Petersen-Graph

Als Gegenbeispiel für manch eine Vermutung wird öfters der Petersen-Graph herangezogen. Eine Darstellung findet man in Abb. 1.12.

Anmerkung: Man kann zeigen, dass der Petersen-Graph nicht hamiltonisch ist, d.h. keinen Hamilton-Kreis zulässt.

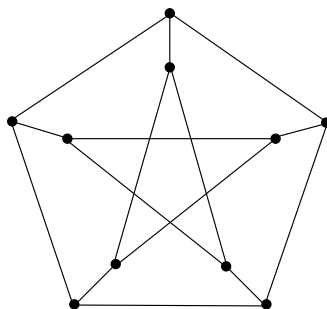


Abbildung 1.12: Eine Darstellung des Petersen-Graphen

Wir fahren nun fort mit weiteren Übersetzungen in graphentheoretische Fragestellungen:

1.3 Planarität von Graphen

1.3.1 Kreuzungsfreie Leitungen

Drei Orte sollen mit dem Wasser-, Elektrizitäts- und Gaswerk verbunden werden; (siehe Abbildung 1.13). Ist dies ohne Überschneidung der Leitungen möglich?

(Eine alternative Einkleidung fragt nach sich nicht kreuzenden Wegen dreier verfeindeter Nachbarn zu Schule, Kirche und Wirtshaus.)

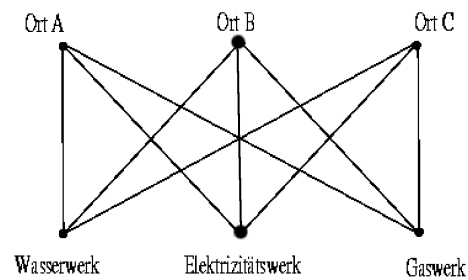


Abbildung 1.13: GWE-Graph, Beispiel eines nicht-plättbaren Graphen

Lösungsweg: Der zugehörige Graph, der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ (auch GWE-Graph genannt), ist nicht plättbar, d. h. ohne kreuzende Kanten zeichnerbar; einen Beweis dieser Tatsache findet man in 1.3.2 e).

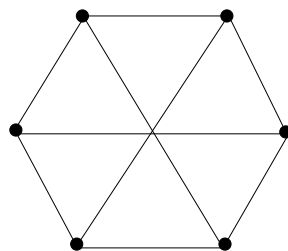


Abbildung 1.14: Zum GWE-Graphen isomorpher Graph

1.3.2 Definition und Eigenschaften ebener Graphen

a) Definition **ebener Graph**: Ein Graph, dessen Ecken und Kanten als Punkte bzw. Linien (Kurven) der euklidischen Ebene dargestellt sind, heißt *ebener Graph* (engl. plane graph), wenn sich seine Kanten (als Linien) nur in Ecken treffen. (Diese Eigenschaft betrifft also den Graphen und seine Darstellung.) Ein Graph wird *plättbar* (engl. planar graph) genannt, wenn er sich als ebener Graph zeichnen läßt.

Beispiel: Der vollständige Graph auf 4 Punkten (s. Abb. 1.15a) ist plättbar. Er ist isomorph zu den ebenen Graphen der Abbildungen 1.15 b) und c).

b) **Eulersche Formel (Euler 1758)**. Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen G gilt die *Eulersche Formel*

$$e + f - k = 2$$

wenn e die Anzahl der Ecken von G , f die Anzahl der Flächen (einschließlich der umgebenden Fläche) und k die Anzahl der Kanten von G bezeichnet.

Beweisskizze: Zu gegebenem ebenen Graphen G konstruiert man einen “*aufspannenden Baum*”, indem man sukzessive zunächst alle Schlingen und dann Kanten von Kreisen derart abbaut, daß der Zusammenhang erhalten bleibt. Bei Wegnahme einer Schlinge oder Kreis-Kante ändern sich f und k jeweils um 1, so daß $e + f - k$ konstant bleibt.

Durch Abbau eines Blattes und der zugehörigen Kante ändern sich e und k um 1 und $e + f - k$ ist weiter unverändert. Man landet schließlich bei dem Graphen “ $\bullet\text{---}\bullet$ ”, für den $e = 2$ und $f = k = 1$ gilt, so daß also auch für G die Eulersche Formel folgt. \square

c) **Anmerkung**: Eine analoge Argumentation zeigt die Gültigkeit der Eulerschen Formel für Graphen, die ohne Überschneidung der Kanten auf der Kugeloberfläche gezeichnet sind.

d) **Anwendung** Der Graph $K_{3,3}$ hat die Parameter $k = 9$ und $e = 6$. Ließe er sich als ebener Graph darstellen, so folgte aus der Eulerschen Formel $f = 5$. Da $K_{3,3}$ dreiecksfrei ist, würde andererseits jede Fläche von mindestens 4 Kanten begrenzt, und jede Kante wäre Grenze von 2 Ländern, was durch doppeltes Abzählen der inzidenten Kanten-Länder-Paare die Ungleichung $2k \geq 4f$ ergäbe, im Widerspruch zu $k = 9, f = 5$. Also ist $K_{3,3}$ nicht plättbar.

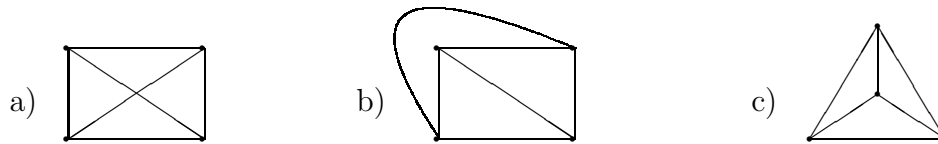


Abbildung 1.15: a) K_4 als Beispiel eines plättbaren Graphen, b), c) zu K_4 isomorphe ebene Graphen

e) Der GWE-Graph ist einer der "Kuratowskischen" Graphen, die ein planarer Graph nicht als Untergraphen enthalten kann (s. z.B. [Ai₃] p.74 und [We] p.259); nach einem **Satz von Kuratowski (1930)** ist ein Graph genau dann nicht plättbar, wenn er ein vollständiges 5-Eck K_5 oder den GWE-Graphen $K_{3,3}$ oder eine Unterteilung dieser Graphen (s. 1.3.2 b) als Untergraphen enthält.

Dabei definiert man eine **Unterteilung** eines Graphen G als einen Graphen \tilde{G} , der aus G dadurch entsteht, dass man "in Kanten zusätzliche Ecken einfügt", genauer eine Kante uv nach Einführung einer neuen Ecke z durch die Kanten uz und zv ersetzt und einen solchen Vorgang evtl. mehrfach wiederholt.

1.3.3 Platonische Körper

Die Eulersche Formel, diesmal für die Kugeloberfläche, lässt sich auch anwenden auf die Bestimmung der *Platonischen Körper* (engl. platonic solids, auch *reguläre konvexe Polyeder* genannt, engl. regular polyhedra). Dabei sind diese von Ebenen begrenzten Körper wie folgt definiert:

a) **Definition Polyeder:** Unter einem **konvexen Polyeder** versteht man die "konvexe Hülle" $P = \text{conv}(S) := \{\sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{s}_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1\}$ einer endlichen Menge von Vektoren $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_s\} \subseteq \mathbb{R}^3$. (Analog ist die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge des \mathbb{R}^2 definitionsgemäß ein **konvexes Polygon**.) Man kann zeigen, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times 3}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

b) Den anschaulichen Begriff der *Seitenfläche* eines konvexen Polyeders kann man wie folgt präzisieren: Eine **Facette** F von P ist eine (nicht in einer Geraden enthaltene) Teilmenge $F = \{\mathbf{x} \in P \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, wenn $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ eine für alle $\mathbf{x} \in P$ geltende Ungleichung ist. Facetten sind damit Polygonflächen in Ebenen zu Halbräumen, die P ganz enthalten.

c) Bestehen alle Facetten eines konvexen Polyeders P aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken und stoßen in jeder Ecke gleich viele dieser Polygone aneinander, so heißt P reguläres Polyeder oder **Platonischer Körper**.

d) **Bestimmung der Platonischen Körper**

Projizieren wir ein reguläres Polyeder auf die Oberfläche einer umgeschriebenen Kugel (dass dies möglich ist, muss man sich noch überlegen), so können wir die Eulersche Formel auf den durch die Bilder der e Knoten, k Kanten und f Facetten gebildeten Graphen G anwenden. G ist regulär, d.h. alle Knoten haben den gleichen Grad d , da in jeder Ecke des Polyeders gleich viele Facetten zusammenstoßen. Durch **doppeltes Abzählen der inzidenten Kanten-Facetten-Paare und der inzidenten Knoten-Kanten-Paare** ergibt sich $2k = nf$ bzw. $2k = de$. Ersetzt man e und f in der Eulerschen Formel, so erhält man

$$(*) \quad 2 = 2k/d + 2k/n - k = k(2/d + 2/n - 1),$$

woraus $2/d + 2/n - 1 > 0$ und damit $2n + 2d > dn$ folgt. Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $(n - 2)(d - 2) < 4$. Wegen $n, d \geq 3$ folgt somit $n, d \leq 5$ und $(n, d) \neq (4, 4), (5, 4), (4, 5), (5, 5)$. Einsetzen der verbleibenden Paare (n, d) in (*) zur Bestimmung von k läßt als Lösungen höchstens die folgenden fünf Möglichkeiten zu, die auch tatsächlich auftreten:

n	d	k	e	f	Platonischer Körper
3	3	6	4	4	Tetraeder
4	3	12	8	6	Würfel
3	4	12	6	8	Oktaeder
5	3	30	20	12	Dodekaeder
3	5	30	12	20	Ikosaeder

Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder haben also Dreiecksflächen, Würfel hingegen Quadratflächen und Dodekaeder 5-Ecks-Flächen als Facetten. Eine Darstellung der "Skelettgraphen", die zu Tetraeder, Würfel und Dodekaeder gehören, findet man in Abb. 1.16.

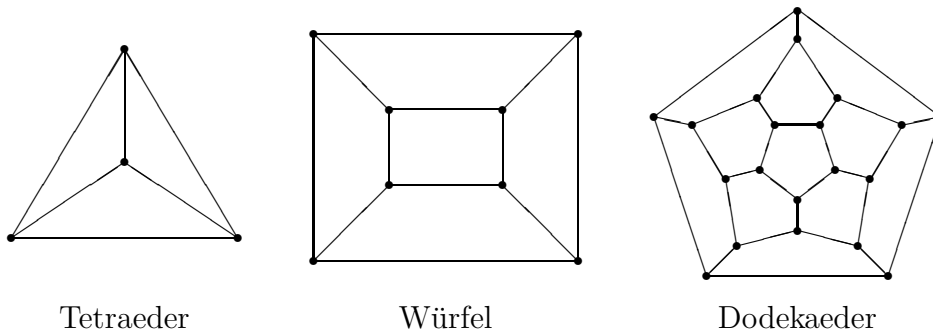


Abbildung 1.16: Die „Skelettgraphen“ zu drei der fünf Platonischen Körper

1.4 Matchings

1.4.1 Job-Vergabe

Es seien m Aufgaben an n Personen zu verteilen; jede Person kann einige der Jobs erledigen, aber keine zwei gleichzeitig. Bei konkreter Ausgangslage soll entschieden werden, wieviele Personen gleichzeitig in Jobs arbeiten können, für die sie geeignet sind?

Die Situation läßt sich durch einen bipartiten Graphen (s. z.B. Abbildung 1.17) darstellen, bei dem die eine Eckenmenge den Personen, die andere den Jobs entsprechen und jede Person (als eine Ecke) mit jedem von ihr ausführbaren Job (als andere Ecke) durch eine Kante verbunden ist. Gesucht ist dann ein maximales Matching (s. 1.4.2 a), entsprechend einer möglichst umfassenden Verteilung der Jobs.

1.4.2 Definition Matching

Ein *Matching* M in einem Graphen G ist eine Menge von paarweise disjunkten Kanten (d.h. von Kanten ohne gemeinsame Endecke) von G ; die Ecken von Kanten des Matchings heißen *bedeckt* (engl. saturated). Die *Matchingszahl* $m(G)$ bezeichnet die maximale Mächtigkeit eines Matchings⁴ von G . Sind alle Ecken von G durch ein Matching M bedeckt, so heißt M ein *perfektes* oder *vollständiges Matching* oder **1-Faktor** von G .

⁴Die maximale Mächtigkeit eines Matchings kann verschieden sein von der Mächtigkeit eines maximalen Matchings!

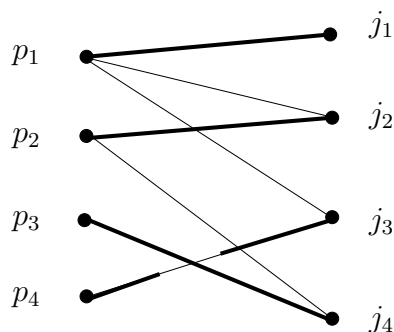


Abbildung 1.17: Beispiel eines bipartiten Graphen mit einem Matching (mit Personen p_i , Jobs j_k und Kanten (p_i, j_k) zwischen Job j_k und jeder dazu befähigten Person p_k ; ein Matching ist fett hervorgehoben)

1.4.3 Party- und Heiratsprobleme

Bei einer Party mit Leuten, von denen sich einige kennen, ist die Frage, ob alle Damen einen Tänzer finden können, den sie vorher kannten. Der zugehörige "Freundschafts-Graph" mit den Damen und Herren als Knotenmengen und den erlaubten Tanzpaarungen als Kanten ist ein bipartiter Graph. Auch hier ist eine Lösung gegeben durch ein Matching, das alle zu Damen gehörenden Knoten bedeckt. Weiter unten (s. 3.3.4) werden wir eine Bedingung (die sogenannte *Party-Bedingung*) kennen lernen, unter der ein solches Matching existiert.

Andere Einkleidung (von H. Weyl):

In einem Kreis unverheirateter Frauen und Männer soll jeder Mann eine ihm sympathische Frau heiraten, wobei auch die Frau den Mann sympathisch finden soll. Wieder bilden Männer und Frauen die Ecken eines bipartiten Graphen und Kanten sind zwischen möglichen, sich gegenseitig sympathischen Partnern gezogen. Ein Matching entspricht dann einer Massenhochzeit, bei der keine Person Bigamie begeht; s. [AiZ]. Gefragt ist nach einem Matching, bei dem jeder Mann "Entdeckt" ist. Auch auf diesen Fall lässt sich die erwähnte Partybedingung anwenden (s. 3.3.4).

1.5 Färbungen von Graphen

1.5.1 Ampelphasen und chromatische Zahlen

An der Straßeneinmündung von Abbildung 1.18 a) sollen die Ampelphasen so gewählt werden, dass keine Kollision möglich ist (die Fußgänger erhalten auch grün, wenn Autos aus der anderen Straße abbiegen dürfen).

Man erhält ein graphentheoretisches Modell, wenn man die verschiedenen Verkehrsrichtungen durch Knoten darstellt und zwei Knoten durch eine Kante verbindet, wenn die beiden Richtungen nicht gleichzeitig grün haben dürfen, s. Abbildung 1.18 b).

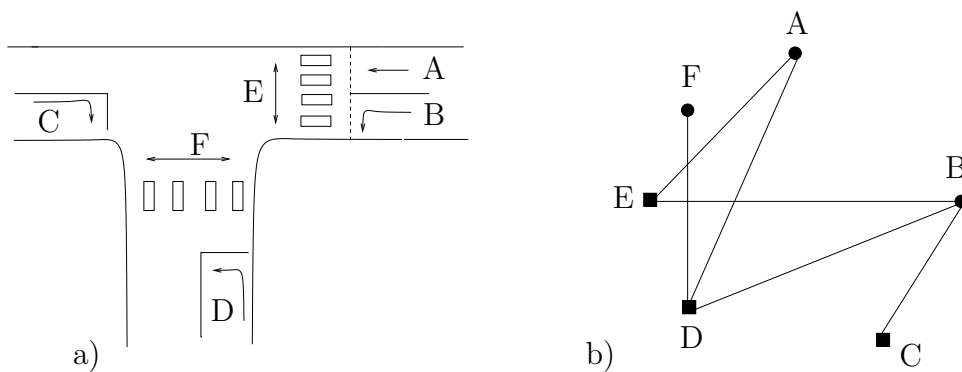


Abbildung 1.18: Kollisionsfreie Ampelphasen und chromatische Zahl

Gesucht ist nun eine *Färbung* des entstandenen Graphen, also die Zuordnung von Farben (Labels) zu den Knoten derart, daß keine Kante gleichfarbige Knoten besitzt. Jeder Farbe kann dann eine Ampelphase entsprechen, bei der die gleichfarbigen Knoten freie Fahrt erhalten. Gesucht ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine Färbung des Graphen möglich ist, die *chromatische Zahl* des Graphen. Der Graph in Abbildung 1.18 b) hat chromatische Zahl 2, es reichen also zwei (in 1.18 durch kleine Kreisscheiben bzw. Quadrate repräsentierte) Ampelphasen aus.

1.5.2 Definitionen zu Färbungen von Graphen

Unter einer zulässigen **Färbung** eines Graphen G mit "Farben" aus einer Menge F versteht man eine Abbildung $f : V(G) \rightarrow F$ derart, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind, also $f(u) \neq f(v)$ für alle Kanten $uv \in E(G)$ gilt,

Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die minimal benötigte Anzahl der Farben für eine Färbung: $\chi(G) := \min\{|F| \mid F \text{ zulässige Färbung}\}$.

1.5.3 Terminplanung und Färbung von Graphen

Es sei ein Terminplan für Ausschuss-Sitzungen eines Parlaments zu erstellen. Die Sitzungen sollen in vorgegebene Zeitabschnitte eingeordnet werden derart, daß keine Ausschüsse zur gleichen Zeit stattfinden, wenn sie gemeinsame Mitglieder haben. Wieviele Zeitabschnitte sind vorzusehen? (Vgl. z.B. [We] 1.1.5)

Modellbildung durch einen Graphen: Ecken entsprechen den Ausschüssen, zwei Ausschüsse sind durch eine Kante verbunden, wenn sie gemeinsame Mitglieder enthalten. Jeder Ecke ist ein Label (Zeitabschnitt) zuzuordnen derart, dass Endpunkte einer Kante verschiedene Labels erhalten. Da es bei den Labels auch hier nicht auf deren numerischen Wert ankommt, nennt man sie wieder "Farben". Die Anzahl der erforderlichen Zeitabschnitte entspricht der Anzahl der benötigten Farben; deren minimale Anzahl ist wiederum die chromatische Zahl $\chi(G)$ des Graphen G .

1.5.4 Ausleuchten von Räumen und Färbungen

In den Ecken eines Museums-Saales mit polygonförmigem Grundriss (s. Abb. 1.19 a) sollen Wärter so platziert werden, dass der ganze Saal von diesen überblickt wird. Wieviel Wärter werden benötigt ?

Behauptet wird, dass man auf jeden Fall mit $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächtern auskommt, wenn n die Anzahl der Ecken des Saals bezeichnet, im Beispiel von Abbildung 1.19 also mit 4 Wächtern (z. B. an den Ecken mit Label 1); (s. z.B. [AiZ] p.165-167).

Lösungs-Idee: Man "trianguliert" das Polygon, indem man solange vorhandene Ecken *kreuzungsfrei* durch Kanten verbindet, bis jede Kante

in einem Dreieck liegt. (Solch eine Triangulierung existiert, was zwar offensichtlich zu sein scheint, aber zu beweisen ist, da es Graphen gibt, die keine Triangulierung besitzen; per Induktion reicht es, eine Trennlinie zu finden.) Wie man zeigen kann, ist die chromatische Zahl des entstandenen Graphen 3. Die Farbe, die bei einer Färbung mit drei Farben am wenigsten vorkommt, tritt *höchstens* an $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken auf; an diesen Ecken kann man je einen, die angrenzenden Dreiecke überschauenden Wärter platzieren.

Analoge Aufgabenstellungen: Man platziere Scheinwerfer in einem auszuleuchtenden Raum oder Mobilfunk-Antennen in einem Tal.

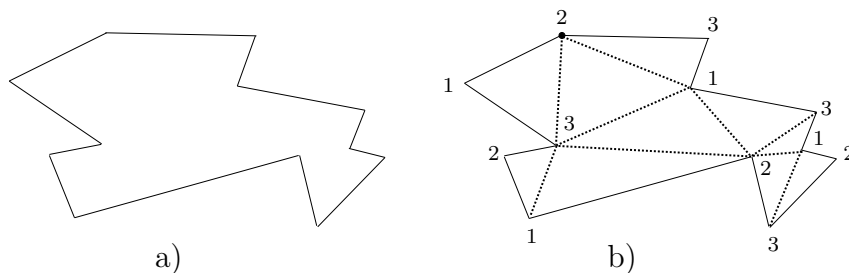


Abbildung 1.19: Ausleuchten eines Museums: a) Polygonaler Raum und b) eine Triangulierung und Färbung

1.5.5 Färbung von Landkarten und dualen Graphen

Eine *Landkarte* ist eine Einteilung der euklidischen Ebene (verallgemeinerbar auf andere Flächen) in zusammenhängende Regionen (Länder). Das Vierfarbenproblem besteht in der Frage, ob sich jede solche Landkarte mit höchstens 4 Farben färben läßt derart, daß Länder mit gemeinsamer Grenzlinie verschieden gefärbt sind. (In der Praxis des Drucks von Landkarten kommt man mit 4 Farben aus.) (Vgl. z.B. [We] 1.1.5, 7.1.6/6 und [Ai₃].)

Man kann diese Frage in ein Problem über Färbung von Graphen umwandeln. Dazu definiert man den *dualen* Graphen (vgl. auch Abb. 1.20):.

Definition dualer Graph: Zu einem zusammenhängenden ebenen Graphen G (auch mit ins "Unendliche" gehenden Ländern) ist der *duale* Graph G^* derjenige Graph, dessen Ecken den Regionen von G entsprechen und dessen Kanten wie folgt bestimmt sind: Ist e eine Kante von G mit Land X auf der einen und Land Y auf der anderen Seite, so sind die Ecken X^*, Y^* von G^* durch eine Kante e^* verbunden. Die Frage nach der 4-Färbbarkeit des planaren Graphen G entspricht nun die Frage, ob $\chi(G^*) \leq 4$ ist.

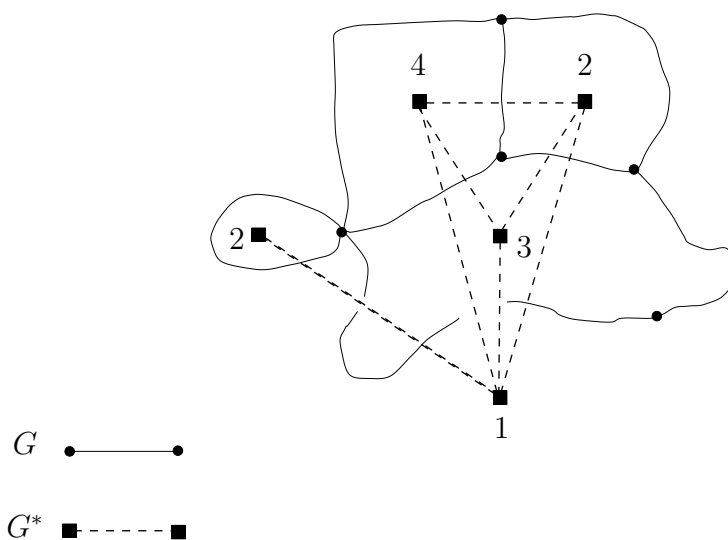


Abbildung 1.20: Beispiel zum Vierfarbenproblem mit Färbung von G^*

Anmerkung: Das Vierfarbenproblem gilt als positiv beantwortet durch den **Satz von Appel u. Haken**(1976): "Jede ebene Landkarte ist 4-färbbar." Zur Lösung waren aber Computer-unterstützte Untersuchungen erforderlich. (Literatur: [A₃] p. 249).

1.6 Übungsaufgaben zu Kap. 1

Übungsaufgabe 1.1

- a) Finde einen Eulerschen Weg im Graphen der Abbildung 1.21!
Gibt es einen geschlossenen Eulerschen Weg?

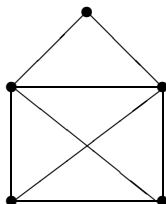


Abbildung 1.21: Das Haus des Nikolaus

- b) Geben Sie einen Hamiltonkreis im Skelettgraph des Dodekaeders an! (Siehe Abb. 1.16 !)

Lösung von Aufgabe 1.1.

a) Ein Kinderreim, siehe Abb. 1.22, gibt die Lösung. (Der Sachverhalt wurde auch in einem Fernseh-Werbespot verwendet und auf „das Haus des Nikolaus Diestelmeier“ verallgemeinert.) Ein Eulerscher Kreis existiert nicht, da es Knoten von ungeradem Grad gibt.

b) Geduldsspiel von Hamilton (1959); siehe Abb. 1.23.

Übungsaufgabe 1.2

Finde eine Weg durch das Labyrinth von Abbildung 1.24 !

(Vgl. [StW] p.385 ff.)

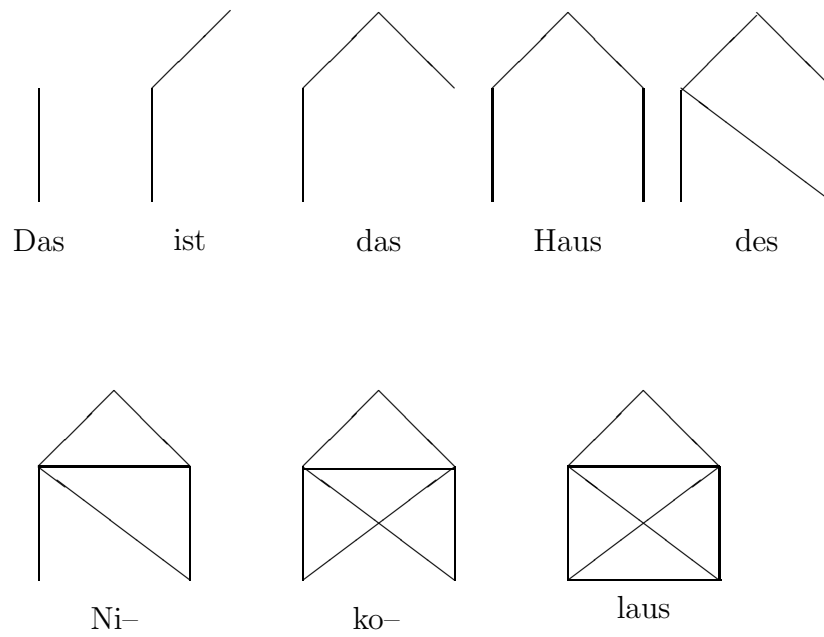


Abbildung 1.22: Kinderreim zu Aufg. 1.1a)

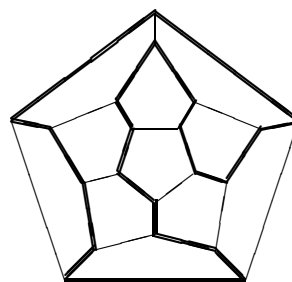


Abbildung 1.23: Hamiltonkreis im Skelettgraphen des Dodekaeders

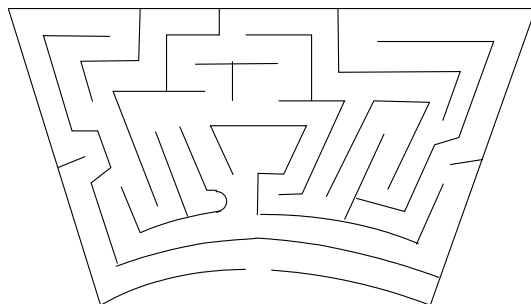


Abbildung 1.24: Hampton Court

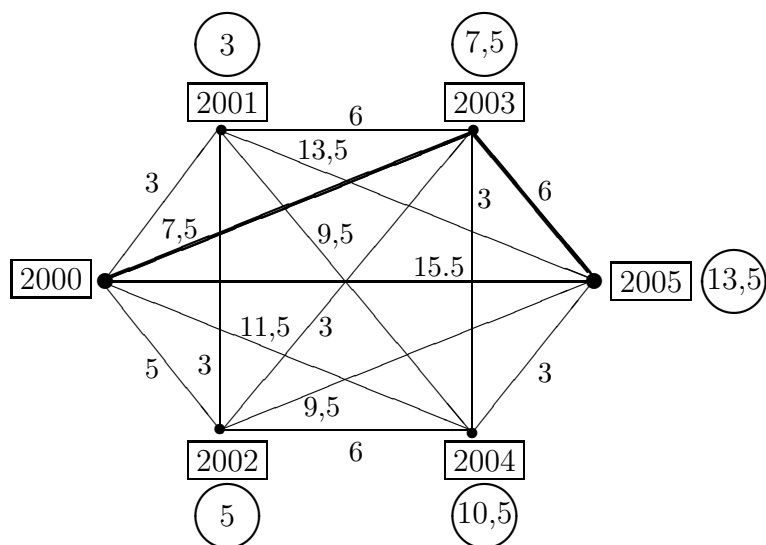


Abbildung 1.25: Graph zu Aufgabe ..