

Korrekturen und Ergänzungen zu: Repetitorium Bachelor Mathematik.

Vieweg+Teubner 2010

Ralph-Hardo Schulz

Stand 24. Februar 2021

(Zeilen-Nummern ohne Berücksichtigung der Kopfzeile und von Leerzeilen oder Figuren (gegebenenfalls auch von deren Legende). Zeile $-n$ heißt n -te Zeile von unten –einschließlich Fußnotenzeilen.)

Anerkennung:

Für Hinweise auf Druckfehler oder Vereinfachungen danke ich Frau Dr.Sabine Giese, Frau Julia Diebold, Frau Gudrun Schlag und den Herren Ruslan Aduk, Dr.Udo Baumgarten, Michael Manske, Peter Patzt, Prof. Dr. Poguntke und Kamer Ucar.

Für das “Mitsammeln” von Klausur-Aufgaben gilt mein Dank u.a. den Professoren Doktoren Ehrhard Behrends, Rudolf Gorenflo und Dirk Werner.

Inhaltsverzeichnis

1	Korrekturen und Ergänzungen	1
2	Ergänzung zum Literaturverzeichnis	13
3	Änderungen zum Index	14
4	Weitere Klausuraufgaben mit Lösungsskizzen	15
4.1	Aufgaben	15
4.2	Lösungsskizzen	30

1 Korrekturen und Ergänzungen

Seite 6 Zeile 11: $(1,0,0\dots)$

Seite 9 Zeile 1: Mächtigkeit (Kardinalzahl)

Seite 10 Zeile -2 : V_1 (statt V)

Seite 28 Aufgabe L5: ...eines K -Vektorraums V mit $\text{char}(V) \neq 2$.

Seite 31 Aufgabe L24 :, die bezüglich der kanonischen Basis die Darstellung

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \dots \quad \text{hat } \dots$$

Seite 31 Aufgabe L28: id_V statt id_v

Seite 33 Aufgabe L37 (v) statt (vi)

Seite 35 Aufgabe L46 Zusatz:

(c) Sei Q der zu A parallele affine Unterraum durch p mit $\dim_{\mathbb{R}} Q = \dim_{\mathbb{R}} A$! Ist dann $W \cup Q$ affiner Unterraum?

Seite 35 Aufgabe 48. mit $A =$

Seite 40 Zeile -5 Zum Satz von Cayley-Hamilton

Achtung! Direktes Einsetzen von A in $\det(A - XE_n)$ ist schon aus formalen

Gründen nicht möglich: $A - XE_n$ ist ja gleich $\begin{pmatrix} \alpha_{11} - X & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} - X \end{pmatrix}$,

und Skalar minus Matrix ist (für $n > 1$) nicht erklärt.

Beweisidee: Einsetzen von $C = A - XE_n$ in die Formel der allgemeinen Laplaceschen Entwicklung

(*) $(E_n \chi_A(X)) = E_n \det C = C \cdot (C_{ij})^T$ (vgl. 1.6).

Beweisskizze:

$\tilde{C} := (C_{ij})$ ist ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades, also von der Form

$\tilde{C} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k$ für geeignete $C_k \in K^{(n,n)}$. Aus (*) erhält man damit

(**) $E_n \chi_A(X) = A \cdot C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k (AC_k - C_{k-1}) - X^n C_{n-1}$. In dieser Gleichung kann man X durch A ersetzen; denn aus $(\lambda_{i,j})(\sum \gamma_k X^k) = \sum X^k (\beta_{ij}^k)_{i,j}$ folgt durch Ausrechnen und Koeffizientenvergleich $\lambda_{i,j} \gamma_k = \beta_{ij}^k$ und damit (**) auch mit A statt X , wobei die rechte Seite 0 wird.

Seite 42 Zeile 5: wie man durch vollständige Induktion nach $\dim V$ und Betrachtung des Orthogonalraumes zu einem Eigenraum zeigen kann,
nach Zeile 8: *Anmerkung:* Auch allgemein sind hermitesche Matrizen zu Diagonalmatrizen mit reellen Einträgen ähnlich und besitzen selbstadjungierte Abbildungen eines endlich-dim Prähilbertraums eine ON-Basis aus Eigenvektoren.

Seite 44 Zeile 14: ('positiv definit' fett drucken!)

Seite 49 Tabelle 2.1: zu Fundamentalmatrix: und A positiv definit

Seite 62 Aufgabe L59 Cayley (statt Caylay)

Seite 64 Aufgabe L70 Vektorraum (statt Vectorraum)

Seite 65 Zeile 11: dass (statt daß)

Seite 71 Zeile -4: *Anmerkung:* Eine reelle ...

Seite 74 Zeile 9/10: (Text zwischen "mon" und "oton" streichen!)

Seite 75 Zeile 8: $a_n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n =$

Seite 77 zu (b)2. : Spezialfall: $E = \mathbb{R}^2$ und

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 |\xi_i - \eta_i| \quad (\text{sogenannte Taxi-Metrik})$$

Zeile -20: $\sum_{i=1}^2$

Zeile -17: $\sum_{i=1}^2$ (zweimal)

Zeile -7 : (auch Supremums-Metrik genannt)

Zeile -4 : (sog. Maximums-Metrik)

Seite 80 Zeile 7: Wir zeigen nun, dass **die**

Seite 83 Zeile -13: $\dots = f(x_0)$ (sog. **Folgenstetigkeit**)

Zeile -7: Abb. 3.5 α

Zeile -7: (Satz von Heine-Cantor)

Seite 84 Abbildungen: (a und b durch α bzw. β ersetzen!)

Zeile -21: Abb. 3.5 β

Seite 90 1b) $a_v = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Seite 91 1a) $\sum_{v=2}^{\infty}$

Seite 91 1c) $\sum_{v=0}^{\infty}$

Seite 91 Zeile -4 (Einschub) *Beweis-Skizze*: Für jedes $n > 2$ liegt die n -te Partialsumme s_n zwischen den jeweils vorhergehenden Partialsummen: $s_n - s_{n-1} = (-1)^n a_n$ und $s_n - s_{n-2} = (-1)^{n-1} (a_{n-1} - a_n)$ haben unterschiedliche Vorzeichen; für jedes $n < k$ liegt s_n damit im Intervall mit den Grenzen s_{k-2} und s_{k-1} , dessen Breite $|s_{k-1} - s_{k-2}| = a_{k-1}$ gegen Null strebt. Damit ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. \square

Seite 91 Zeile -1 (Einschub): *Beweisidee*: Anwendung des Cauchy-Kriteriums: Aus

$$\sum_{\kappa=m}^n |b_{\kappa}| < \varepsilon \text{ für alle } n < m > N \text{ (mit geeignetem } N) \text{ und } n, m > n_0 \text{ folgt}$$
$$\sum_{\kappa=m}^n |a_{\kappa}| < \varepsilon .$$

Seite 92 Zeile 3 (Einschub) *Beweisidee*: Kontraposition des Majorantenkriteriums.

Seite 92 Zeile 9 (Einschub) *Beweisidee*:

Aufspalten der Partialsummen $\sum_{v=0}^N a_v$ (zunächst mit $N = 2^{n+1} - 1$):

$$\text{Beweisskizze: } \sum_{v=0}^N a_v = a_0 + \sum_{v=1}^{2-1} a_v + \sum_{v=2}^{2^2-1} a_v + \sum_{v=2^2}^{2^3-1} a_v + \dots + \sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1} a_v \text{ in}$$

Teilsommen, deren Summanden jeweils größer gleich dem ersten und kleiner gleich dem letzten Term der Teilsumme sind und sich damit leicht abschätzen lassen:

$$a_0 + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n 2^v a_{2^v} \leq a_0 + \sum_{v=0}^n 2^v a_{2^{v+1}-1} \leq \sum_{v=0}^N a_v \leq a_0 + \sum_{v=0}^n 2^v a_{2^v}.$$

Die Partialsummen beschränken sich also gegenseitig. □

Seite 93 Zeile -8: $\sum_{v=1}^{\infty}$

Seite 97 Zeile 6: im Punkt x_0
 Zeile 9: \leq statt $<$

Seite 100 Zeile -1 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x =$

Seite 103 Zeile -3 : $+d$ (statt $+c$)

Seite 110 Zusatz zu Aufgabe A15:
 Beweisen Sie unter Verwendung dieser Aussage, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, 1]$ mit der Eigenschaft $0.2 + 0.5x^n = x$ gibt.

Seite 116 Zeile -2: Busam/Epp[BE]

Seite 119 Zeile 8: $\underset{||v||=1}{=}$

Seite 121 Zeile -4: (für $x \neq 0 \neq y$; sonst direkt gleich 0).

Seite 128 Zeile 18: Integralfunktion

Seite 136 Aufgabe A66 und A68 sollten zusammengefasst werden!

Seite 137 Zeile -18 (Aufgabe A71): $v = f\left(\begin{pmatrix} a+0,01 \\ 1+0,03 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Seite 138 Zeile -2 (Aufgabe A81): $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Seite 142 Zeile -1: Busam/Epp[BE]

Seite 144 Zeile 3: *Gleichverteilung* (kursiv!)

Seite 148 zum "weiteren Beispiel d)":
 Die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Ausprägungen zweier Merkmale E, \bar{E} und F, \bar{F} liefern die Einträge in die sogenannte **Vierfeldertafel** (2×2 -Kontingenztafel):

	F	\bar{F}	gesamt
E	$P(E \cap F)$	$P(E \cap \bar{F})$	$P(E)$
\bar{E}	$P(\bar{E} \cap F)$	$P(\bar{E} \cap \bar{F})$	$P(\bar{E})$
gesamt	$P(F)$	$P(\bar{F})$	1

für das Beispiel d) mit W_i bzw. S_i beim i -ten Zug ($i = 1, 2$) also

	W_1	S_1	gesamt
W_2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
S_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$
gesamt	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Aus der Vierfeldertafel kann man dann das **umgekehrte Baumdiagramm** konstruieren, mit dem man ohne explizite Anwendung der Formel von Bayes aus $P(E|F)$ die Wahrscheinlichkeit $P(F|E)$ bestimmen kann, im Beispiel also z.B. $P(W_1|W_2)$.

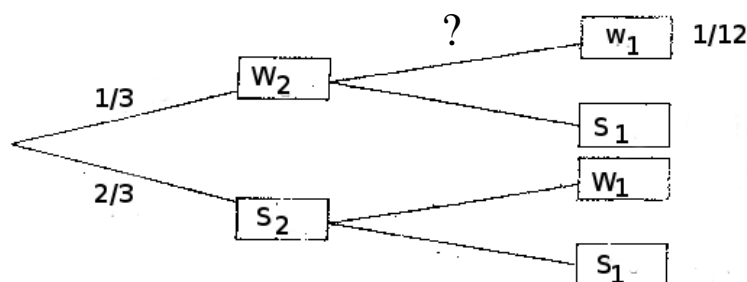


Abbildung 5.5a: Umgekehrtes Baumdiagramm zum Beispiel der Abb. 5.5.

$$P(W_1|W_2) = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4} \left(= \frac{P(W_1 W_2)}{P(W_2)} \right).$$

Seite 153 Zeile -12: Standardabweichung (Streuung)

Seite 154 statt der letzten 5 Zeilen:

X hat die Verteilung von $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ von n unabhängigen alternativ mit Wahrscheinlichkeiten p und $(1 - p)$ verteilten Zufallsvariablen X_i (einer Bernoulli-Kette). Daher gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot p \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \cdot pq.$$

□

Seite 159 Zeile 13: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ stochastisch

Seite 161 Zeile -8: durch die Normalverteilung approximierten

Seite 166 Zeile 8: W18 (statt WTh18)

Seite 166 Fußnote 8 streichen

Seite 167 Zeile -9: Komma nach 'Wahrscheinlichkeit'

Seite 169 Zeile 7: Komma bei (w, w)

Seite 169 Zeile -12/-11: 98% alle einsendenden Frauen und mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% alle einsendenden Männer

Seite 172 Aufgabe W51 (statt Aufgabe 51)

Zeile -4 von Aufgabe W52: verändert, (Komma) Zeile -3 von Aufgabe W52 auf dem

Zeile -1 : (Ergänzung:) Behrends [Beh3], Geogii [G], Büchter & Henn [BH]

Seite 180 (Ergänzende 2. Fußnote:) Lösungen siehe Seite 343-345 !

Seite 186 Zeile 4: eines 3-dim affinen Raumes \mathcal{A} auf eine Ebene F von \mathcal{A}

Abbildung 7.3: Parallelprojektion π eines 3-dim affinen Raumes \mathcal{A} auf eine Ebene von \mathcal{A} .

zu Anmerkung 3.): Siehe Aufgabe E39 (s.u. in den Korrekturen und Ergänzungen!)

Seite 187 4.Zeile von a): uneigentlichen

Seite 189 Abbildung 7.7 a) (fehlendes) A

Seite 190 Zeile -5: Relation \leq' wählen:

Seite 196 Zeile 3: $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Seite 198 Zeile -13: (Komma vor und)

Zeile -8: $\ell(\overline{PQ}) = \ell(\overline{RS})$

Seite 200 Zeile -22:(Leerzeichen vor dem Komma streichen!)

Seite 201 Zeile -5: Summe der Winkelgrößen

Seite 207 *Alternativer Beweis zur Umkehrung des Satzes von Thales* (nach einem Hinweis von Sabine Giese):

Aus dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck konstruiere man durch Antragen rechter Winkel an \overline{AC} in A und an \overline{BC} in B ein Rechteck. Dessen Diagonalen halbieren sich in M und sind kongruent. Da die Strecken \overline{AM} und \overline{CM} also gleich lang sind, liegt C auf einem Halbkreis um M mit Radius $|\overline{AM}|$.

Weiterer alternativer Beweis zur Umkehrung des Satzes von Thales (nach einem Hinweis von Beate Enderlein):

Sei $\triangle ABC$ das betrachtete Dreieck mit rechtem Winkel bei C , und sei M der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} . Die Parallele zu BC durch M (d.h. das Lot von M auf AC) schneidet die Strecke \overline{AC} in einem Punkt P . Nach dem 1. Strahlensatz ist dann, so wie M der Mittelpunkt von \overline{AB} ist, auch P der Mittelpunkt von \overline{AC} . Die Dreiecke $\triangle APM$ und $\triangle MPC$ haben die Seite \overline{MP}

gemeinsam, rechte Winkel bei P und kongruente Seiten \overline{AP} bzw. \overline{PC} ; nach dem Kongruenzsatz SWS sind sie daher kongruent, woraus $|\overline{MA}| = |\overline{MC}|$ folgt. Dies zeigt, dass C auf dem Kreis um M mit Radius $|\overline{MA}|$ liegt, was zu zeigen war.

Seite 210 Zeile 5: (Leerzeichen vor Fußnotennummer 13 streichen!)

Seite 217 Zeile 16: Ebene

Seite 218 E17 2.Zeile eine

Seite 219 E22 1.Zeile rechtwinkliges
E22 2.Zeile Dreieck

Seite 222 Zeile -1 Berchtold[Ber], Graumann [Gr], Kasten/Vogel [KV]

Seite 226 5.Zeile in 8.2 Fußnote zu Peanostruktur {genannt nach Giuseppe Peano (1858-1939); erste axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen allerdings schon 1888 durch Richard Dedekind (1831-1916), von Peano 1889 zitiert.}

Seite 229 Abbildung; (Strich von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ zu \mathbb{R} kann ergänzt werden).

Seite 232 Zeile -15: (S. auch Aufgabe AZ4.)

Seite 238 Zeile -17/16 • Verbindungsgeraden bereits konstruierter Punkte • Kreisen, deren Mittelpunkt bereits konstruiert ist und deren Radius ...

Seite 239 Zeile 2: (Durch Subtraktion der Gleichungen zweier Kreise sieht man, dass die Schnittpunkte einer Gleichung 2. Grades und nicht einer 4.Grades genügen.)

Seite 239 Zeile -10: (...Statt des Eisensteinschen Kriteriums kann man auch direkt eine mögliche Zerlegung von $g(X) := X^3 + 3X - 3$ modulo 3 betrachten und zeigen, dass die Faktoren modulo 3 Monome sein müssen und ihre absoluten Glieder daher durch 3 teilbar, im Widerspruch dazu, dass 9 nicht das absolute Glied von g teilt.)

Seite 240 Fußnote 8: Es gilt sogar (wie eine Anpassung der Beweisskizze zeigt):

Seite 241 Zeile 14: (neue Zeile für 'Bedeutung')

Seite 241 Zeile 15: bzw. Faktorgruppen ('als' streichen)

Seite 247 Zeile 8: $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$

Seite 248 Zeile -2: Reiss/Schmieder [RS]

Seite 249 Lösung zu Aufgabe L4 bitte ersetzen durch:

Lineare Unabhängigkeit einer Menge M heißt laut Definition, dass jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist.

Sei also $F = \{e_{a_1}, \dots, e_{a_n}\}$ eine endliche Teilmenge von $E := \{e_a | a \in \mathbb{R}\}$ und seien $\lambda_{a_1}, \dots, \lambda_{a_n}$ aus \mathbb{R} mit $\sum \lambda_{a_i} e_{a_i} = 0$. Durch $n - 1$ -maliges sukzessives Ableiten und Einsetzen von $x = 0$ erhält man das lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da alle a_i verschieden sind, hat die Koeffizientenmatrix (diese ist eine Vandermonde-Matrix) vollen Rang, d.h. alle λ_i sind gleich 0. Dies zeigt, dass jede endliche Teilmenge von E und damit E selbst linear unabhängig ist.

Die Dimension von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist also mindestens gleich der Kardinalzahl von \mathbb{R} .

Seite 250 Zeile 8 (Lösung zu Aufgabe L5 (a)):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 - 2) - (-8 + 4) - (4 - 6) = 2 \neq 0.$$

Zeile 10 (Lösung zu Aufgabe L5 (b)): .. - $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (geändertes Vorzeichen)

Seite 251 Zeile - 6 ff. (Ergänzung zu Aufgabe L10) *Alternativ* kann man neben der Linearen Unabhängigkeit von $B' = (f(v_i))_{i \in I}$ (siehe oben) auch zeigen, dass B' Erzeugendensystem von W , insgesamt also Basis von W ist: Zu jedem $w \in W$ existiert ein Urbild v unter der Bijektion f . Für geeignete λ_i (nur endlich viele ungleich 0) ist $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ und damit (wegen der Linearität von f)

$$f(v) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(v_i) \in \langle B' \rangle.$$

Es folgt $\dim W = |B'| = |I| = \dim V$.

Seite 255 Zeile 4 (Lösung zu Aufgabe L21) elementaren

Seite 255 Zeile 12 erhalten

Seite 256 Zeile -9 (Lösung zu Aufgabe L25) $M_C^B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \dots \\ -\frac{3}{2} & \dots \end{pmatrix}$

Seite 258 Zeile 1: $\dots = \sum_{i=1}^3 f_1(e_i) \lambda_i = \dots$

Seite 258 Ende von Zeile 12: ")βtreichen!

Seite 259 Zeile 4 (Lösung zu Aufgabe L32): W F W W F

Seite 260 Zeile -4 (Lösung zu Aufgabe L36):.. ergibt sich (*) $f(x) = ..$

Seite 262 Zeile 3 (Lösung zu Aufgabe L39) Vektor (statt Lösungsvektor)

Seite 263 Zeile 5 (Lösung zu Aufgabe L43 b)

Alternativ reicht es, zu zeigen: $\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{d}) \neq 0$.

Seite 264 Lösungsskizze zu Aufgabe L46 (Neufassung):

(a) Nein. Wähle z.B. $n \geq 2$, ferner A als Punkt im Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und p so, dass die Verbindungsgerade W von p zum einzigen Element von A keine Nullpunktsgerade ist.

(b) Ist A ein Punkt, so ist die Verbindungsgerade mit p ein 1-dim affiner Unterraum.

Gilt hingegen $1 \leq \dim_K A < n$, so ist W kein affiner Unterraum:

Sei $A = v + U \neq U$ mit Unterraum U mit $1 \leq \dim U < n$. Wäre W nun affiner Unterraum, so wegen $A \subseteq W$ (mit $t = 1$) und $p \in W$ (für $t = 0$) von der Form

$$W = v + U_1 = p + U_1$$

mit Unterraum U_1 ; dann folgten aus $A = v + U \subseteq W = v + U_1$ die Beziehungen $U \subseteq U_1$ und $p + U \subseteq p + U_1 = W$.

Andererseits implizierte $p + u = p + t(a - p)$ sofort $u = t(a - p)$, also $t = 0$ oder $a - p = ut^{-1}$ und damit $u = 0$ oder $p \in a + U \subseteq A + U = A$, ein Widerspruch zu $\dim U = \dim A \geq 1$ bzw. $p \notin A$.

Also ist W kein affiner Unterraum.

Anschaulich gesehen fehlen am affinen Unterraum $p + (v - p)\mathbb{R} + U$ die Punkte (außer p) der zu A parallelen Geraden durch p ; diese Geraden schneiden ja A nicht.

(c) Ja. Ist $A = v + U$, dann gilt $Q = p + U$ und

$$\begin{aligned} W \cup Q &= \{x \mid x = p + (q - p)\tau, \tau \in \mathbb{R}, q \in A\} \cup (p + U) \\ &= \{x \mid x = p + (v - p)\tau + u\tau, \tau \in \mathbb{R}, u \in U\} \cup (p + U) \\ &= \{x \mid x = p + (v - p)\tau + u\tau, \tau \neq 0, u \in U\} \cup \{p\} \cup (p + U) \\ &= p + (v - p)(\mathbb{R} \setminus \{0\}) + U \cup (p + U) = p + (v - p)\mathbb{R} + U. \end{aligned}$$

$U_1 := (v - p)\mathbb{R} + U$ ist ein Unterraum (Summe zweier Unterräume), damit $W \cup Q$ Nebenklasse nach einem Unterraum, also affiner Unterraum.

Seite 266 Zeile 3: $\sum_{i=0}^n$

Seite 267 Zeile 2: der einzige

Seite 267 Zeile –19 (in der Lösung zu Aufgabe L58):

$$\det \begin{pmatrix} -\cos \varphi - x & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - x \end{pmatrix} = x^2 - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = x^2 - 1$$

Zeile –16 : Alternative Lösung zu Aufgabe L58:

Wegen $A^2 = E_2 \neq A$ und $A \cdot A^T = E_2$ sowie $\det A = -1$ ist (nach Klassifizierung der orthogonalen Transformationen) f eine Geradenspiegelung.

Zeilen –12 und –13 (in der Lösung zu Aufgabe L59): annulliert

Zeile –11 Eigenwert von A

Zeile –9 $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ und nach dem Satz von Cayley-Hamilton daher $A^n = 0$.

Seite 268 letzte Zeile $M = \{\dots\}$.

Seite 269 Zeile –4 (in der Lösung zu Aufgabe L64): Für je zwei Vektoren (statt 'Dann gibt es')

Seite 273 Zeile 5 (in der Lösung zu Aufgabe L74) gilt dann (statt 'also')

Seite 277 Zeile 5 (in der Lösung zu Aufgabe L83 c):

$$B = \left((0, 1, 0, 0), \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 0, 5, 4) \right)$$

Seite 278 Zur Lösung von Aufgabe L90 hinzufügen:

Anmerkung: Man kann auch zeigen, dass jede zu H parallele Hyperebene unter τ fix bleibt. Bei den Abbildungen τ handelt es sich also um eine Verallgemeinerung der uns aus der euklidischen Ebene bekannten Scherungen auf beliebige endliche Dimensionen und beliebige Körper.

Seite 285 Zeile 15: Wegen $f(x)$...

Seite 286 Zeile 13: Komma vor 'und'

Seite 287 Zeile 19 (in der Lösung zu Aufgabe A15): $f(b) < b$.

Seite 287 Zeile 22 (in der Lösung zu Aufgabe A15): $g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

Seite 287 Beweis der Zusatzaufgabe von Aufgabe A15:

Da die Funktion f mit $f(x) = 0,2 + 0,5x^n$ stetig auf $[0, 1]$ ist, reicht zum Nachweis der Behauptung das Verifizieren von $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Für nicht-negative x ist $0,2 + 0,5x^n$ ebenfalls nicht-negativ, und für $0 \leq x \leq 1$ ist wegen der Monotonie der Potenzfunktion auf diesem Intervall auch x^n kleiner gleich 1. \square

Seite 293 Zeile -5: stetig

Seite 297 Zeile 8 (in der Lösung zu Aufgabe A38): für f' , dass gilt:

Seite 301 Zeile -8: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Zeile -4: Komma vor 'und'

Seite 304 Zeile 2: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

Seite 304 Zeile 3: $\int_{\sin x}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \dots \int_{\cos x}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

Seite 304 Zeile 4: $\ln \frac{1}{2}\sqrt{2} \dots - \ln \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Seite 306 vorletzte Zeile von Aufgabe A64, vorletzter Term:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)}{t} =$$

Seite 314 zu Aufgabe A81 (a) (Zeile -10) Die Differenzierbarkeit folgt auch aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen (s. Teil b).

Seite 315 Zeile 3 von Aufgabe A83: bzw. aus $[F(b), F(a)]$ ist, ...)

Seite 323 Zeile 3 von Aufgabe W9: eine

Seite 327/328 Lösungsskizze zu W19 streichen und ersetzen durch:

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter der zunächst gewählten Tür steht, ist $\frac{1}{3}$, und zwar unabhängig davon, wie das Spiel noch weitergeht. Wenn der Kandidat dann bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt, verändert sich diese Wahrscheinlichkeit nicht. Daher ist es sinnvoll, nach dem Öffnen einer Tür durch den Moderator zur anderen Tür zu wechseln.

Genauer: Sei 1 die Nummer der Tür, hinter der das Auto steht, und j die Nummer der gewählten Tür. Ist $j = 1$, so führt ein Wechsel zwangsweise zum Verlust. Ist $j \neq 1$, so muss der Moderator Tür Nummer k mit $k \neq j$ öffnen; der Wechsel des Kandidaten von Tür j führt zu Tür 1 und damit sicher zum Gewinn. Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinnfall ist $\frac{2}{3} \cdot 1$.

Literaturhinweis zur Umsetzung für den Unterricht in Sekundarstufe I:

K.Heckmann & F.Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2012. §9.3

Seite 333 Zeile -10: angegebene

Seite 341 Zeile -2:) (Klammer zu vor dem zweiten Gleichheitszeichen)

Seite 344 Tabelle 9.1 rechte Spalte, 3. Zeile von unten $(\dots \cos(zk + h))/6$ (statt $(\dots \cos(zk + h))/3$)

Seite 345 Tabelle 9.2: (Die letzte Aussage ist wahr, nicht falsch.)

Seite 346 Zeile 11: ...Ebene E fest: denn aus...

Zeile 12: Beweis zu (a)

Seite 346 Aufgabe E3: Lösungsidee: Satz von Desargues (Desarguessche affine Ebene als Modell für die Zeichenebene.)

Seite 348 Aufgabe E8, 2.Absatz: Nun tragen wir auf BA^-

Seite 348 Aufgabe E9: Letzter Satz: alternativ: Wegen der Kongruenz von Stufenwinkeln an parallelen Seiten sind damit alle Winkel rechte Winkel.

Seite 349 Zeile -5 (Aufg. E13): ΔBM_aA

Seite 354 Aufgabe E26 (iii) (Kürzer mit Eigenschaft der Mittelsenkrechten:) Da X_1, X_2 Punkte des Kreises sind, gilt $|\overline{MX_1}| = |\overline{MX_2}|$; daher ist M Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{X_1X_2}$.

Seite 357 zu Aufgabe E 32: Zeile 20 Da $\pi_P \neq \pi_Q$, ist $\varphi = \pi_P \circ \pi_Q$ nicht ...

Seite 357 zu Aufgabe E 32: Zeile 21 da π_P, π_Q Dehnungen sind (zentrische Streckungen mit Faktor -1)

Seite 357 zu Aufgabe E 32: Zeile 24 Da Punktspiegelungen aber (als Streckungen) durch ein Paar von Bild und Urbild und dem Mittelpunkt als Zentrum eindeutig bestimmt sind

Seite 357 zu Aufgabe E 32: Zeile 27 Zeile zu ersetzen durch: Wegen

$$\varphi(Q) = \pi_P(\pi_Q(Q)) = \pi_P(Q) \in PQ$$

ist φ Translation entlang PQ .

Seite 357 Zeile -4: h und g

Seite 358 zu Aufgabe E33: (Punkt am Ende fehlt.)

Seite 358 2.Zeile zu E34: über (statt üver)

Seite 358 10. Zeile zu E34: gerade (statt Gerade)

Seite 358 Zeile -3 zu E35: $\dots = \gamma_{w_\alpha}(\gamma_h(AB)) = \dots$

Seite 359 zu Aufgabe E 37: Zeile -16 $\text{id} = \gamma^2 \neq \gamma$

Seite 359 zu Aufgabe E 37: Zeile -3: Wird A auf B (bzw. A auf C oder A auf D)

Seite 360 Zeile 18 , (Komma vor 'Symmetrieachsen')

Seite 362 zu Aufgabe AZ5: Klammer zu am Ende

Seite 362 Zeile 16: .. oder $(x-1)|h(x)$;

Seite 362 Zeile 20: teilerfremd

Seite 362 Zeile 24: $x^3 + x + 3 = (-x^2 - 3x - 1)(-x + 3) + 9x + 6$
 $-x^2 - 3x - 1 = (9x + 6)(-\frac{1}{9}x - \frac{7}{27}) + \frac{5}{9}$

Seite 362 zu Aufgabe AZ6: Alternative bei (b): Man kann die Ergebnisse des Euklidischen Algorithmus von Teil (a) soweit nutzen, wie in \mathbb{Z} gerechnet wird und keine Reduzierung modulo 5 nötig ist.

Seite 362 letzte Zeile: nicht

Seite 363 Zeile -12: $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{-d}\}$

Seite 363 Zeile -10: Klammer am Ende der Zeile

Seite 363 Zeile -7: der \mathbb{Z} und \sqrt{d}

Seite 363 Zeile -1: $ax + by = 0$).

Seite 365 Zeile -10: β quad streichen

2 Ergänzung zum Literaturverzeichnis

Seite 367 nach Zeile 10 Einschub: [BE] Rolf Busam und Thomas Epp: Prüfungstrainer Analysis. Spektrum. Springer-V. Berlin/Heidelberg 2008
Zeile -3: 1975¹, 2010¹⁷

Seite 367 nach [Beh2] Einschub:

[Beh3] Ehrhard Behrends: Elementare Stochastik. Ein Lernbuch von Studierenden mitentwickelt. Springer Spektrum Verlag. 2013.

[Ber] Florian Berchtold: Geometrie.I Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete. Springer Spektrum. 2017.

[BH] A.Büchter & H.-W.Henn: Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Mathematik für das Lehramt. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2005, 2007

Seite 368 nach Zeile 5 Einschub:

[G] Hans-Otto Georgii: Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. De Gruyter V. 2007³

[Gr] Günter Graumann: EAGLE-STARHILFE Grundbegriffe der Elementaren Geometrie: 2. Auflage Leipzig 2012.

[GS] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker: One Thousand Exercises in Probability. Oxford Univ.Press, 2007⁸.

Zeile 8: 1994⁴

nach Zeile 8 Einschub: [H] Robin Hartshore: Geometry: Euclid and Beyond. Springer V. Berlin. korr.Nachdruck 2002.

[He] Norbert Henze: Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. Springer Spektrum 2013¹⁰.

[KV] Hendrik Kasten, Dennis Vogel: Grundlagen der ebenen Geometrie. Eine zugängliche aber exakte Einführung in die ebene Geometrie. Springer Spektrum. 2018.

Seite 369 [RS] Kristina Reiss und Gerald Schmieder: Basiswissen Zahlentheorie. Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche. Springer-V. Berlin/Heidelberg 2007².

[St] Einführung

3 Änderungen zum Index

Seite 370 ähnliche Figuren, 58, 217

ähnliche Matrizen 12, 38

Aleph Null (\aleph_0) 9

algebraisch abgeschlossen 107, 238

(Bézout .. streichen!)

Seite 371 Baumdiagramm s. Wahrscheinlichkeitsbaum

Bézout, Satz von B. 231

c 9

Seite 371 Dedekind-Struktur, 226

Seite 372 direkte Summe 8, 30-32, 62

dividierte Differenzen 176, 181, 343

Ebene, elliptische E. 54, 195

Ebene, euklidische E. 20, 54, 196 (einmal streichen)

Einheitswurzel, 237, 240

Exponentialfunktion, 82, 93, 135, ...

Seite 373 Geometrie, elliptische G. 54, 195

geometrische Reihe, 89, 111, 112, 289, 293

Gleichverteilung kontinuierliche, 155, 157, 169, ...

Kardinalzahlen \aleph_0 , **c** 9

Seite 374 Körper, endlicher K., 240, 247

Integral - Funktion, 102, 127, 128

Integral - Kriterium, 92, 111, 114

Integral - Mittelwertsatz 129

Integration-partielle I. 102, 103, 114-116

Kern 14, 30-32, 65

Seite 375 (Kompositionsreihe richtig einordnen!)

konvexe Menge, konvexe Hülle 191 **f**.

Leibnizkriterium, 91, 112, 140, 142

- Seite 376 Logarithmus, 82, 110, 135 ...
- Matrix
 - hermitesche M. 42, 49
 - orthogonale M. 13,49
 - positiv definite M. 44, 49
 - symmetrische M. 41,42,49,63, 64
 - unitäre M. 13,49
 - Metrik
 - euklidische M., 77 (entsprechende Zeile weiter unten streichen)
 - Maximums-M., 77
 - Supremums-M., 77
 - Taxi-M. 77
 - MWS–Integralmittelwertsatz
 - Newtonsche dividierte Differenzen 176, 181, 343
- Seite 377 Parallelogrammgleichung (nicht-kursives 67 streichen)
- partielle Integration, 102, 103, 114-116
 - Potenzreihe, ... s.auch A110 in den Ergänzungen
- Seite 378 Reihe, geometrische, 89, 111, 112, 289, 293
- Reihenkonvergenz, 89-93, 111, 112, 114
 - stetige Funktion (Abbildung) 82-86, 95-97, 99, 117, 118, 66, 109-114, 136-138
 - Streuung (s. Standardabweichung)
- Seite 379 direkte Summe, 8, 30-32, 62
- Supremumsmetrik, 77
 - Taxi-Metrik, 77
- Seite 380 Vierfeldertafel, Ergänzung zu Seite 148; Aufgabe W55
- Wahrscheinlichkeitsbaum
 - umgekehrter W., Ergänzung zu Seite 148; Aufgabe W55

4 Weitere Klausuraufgaben mit Lösungsskizzen

4.1 Aufgaben

zu Seite 32 Zusätzliche Aufgabe zu 1.2:

Aufgabe L108 (lineare Abbildung, Basis, Dimension)

Zeigen Sie ohne Verwendung von Dimensionssätzen:

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K , und existiert ein Monomorphismus (d.h. eine injektive lineare Abbildung) von V in W , so folgt

$$\dim_K V \leq \dim_K W.$$

Anmerkung: Sie dürfen den Basisexistenzsatz und den Basisergänzungssatz benutzen. Wählen Sie eine Basis von V !

Aufgabe L109 (Matrix, Kern einer linearen Abbildung)

Seien V ein 3 – dim Vektorraum über \mathbb{R} und f ein Endomorphismus von V , also eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$. Der Kern U von f habe Dimension 1; ferner seien b_1 und b_2 linear unabhängige Vektoren aus V mit

$$f(b_1 + b_2) = 2b_1 \text{ und } f(b_1 - b_2) = 2b_2 \text{ sowie } \langle b_1, b_2 \rangle \cap U = \{0\}.$$

Wählen Sie eine Basis B von V geeignet aus, und geben Sie die f und f^2 darstellenden Matrizen $M_B^B(f)$ und $M_B^B(f^2)$ an!

zu Seite 33 Zusätzliche Aufgabe zu 1.3:

Aufgabe L110 (Faktorraum, Basis) (ähnlich zu Aufgabe L33)

Sei U ein nicht-trivialer echter Unterraum mit Basis B_U des K – Vektorraums V ; sei ferner $B = B_U \dot{\cup} D$ eine Ergänzung von B_U zu einer Basis B von V (und damit $D = B \setminus B_U$).

Zeigen Sie, dass dann $B_{V/U} := \{d + U \mid d \in (B \setminus B_U)\}$ eine Basis des Faktorraums V/U ist.

zu Seite 34 Zusätzliche Aufgaben zu 1.4 (und 1.2):

Aufgabe L102 (LGS)

(a) Für welchen Wert t ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & t \cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

nicht-trivial lösbar? Bestimmen Sie für diesen Wert die Menge aller Lösungen!

(b) Kann es vorkommen, dass ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten keine Lösung hat? Falls ja, geben Sie ein Beispiel!

(c) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten an, das den ganzen \mathbb{R}^3 als Lösungsmenge hat!
(Anmerkung: Dieser Teil ist mit Aufgabe L37 (v) identisch.)

Aufgabe L105 (Vektorraum der Polynome, LGS)

Sei V der \mathbb{R} -Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 3 ; in V betrachten wir die durch

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x^3$$

definierte Basis $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Sei

$$T : V \rightarrow V \quad \text{die durch} \quad (Tf)(x) = f(x+1)$$

definierte lineare Abbildung.

- (a) Bestimmen Sie die T bzgl. der Basis B darstellende Matrix $A := M_B^B(T)$.
 (b) Geben Sie die Inverse von T an!
 (c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (b) die Inverse von A , ohne Zeilenumformungen anzuwenden!

Aufgabe L111 (LGS, Endomorphismus, Kern, Rang, volles Urbild)

- (a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über \mathbb{R} :

$$(*) \quad \begin{cases} \xi_1 & & +\xi_3 & & = & 1 \\ & \xi_2 & & +\xi_4 & = & 1 \\ & \xi_2 & +\xi_3 & & = & 1 \\ \xi_1 & +\xi_2 & +\xi_3 & +\xi_4 & = & 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems sowie den Lösungsraum L von $(*)$!

- (b) Seien $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^4$ und f ein Endomorphismus von V , für den gilt:

$$(\diamond) \quad \begin{cases} f(b_1) & = & b_1 & & +b_4 \\ f(b_2) & = & & b_2 & +b_3 & +b_4 \\ f(b_3) & = & b_1 & & +b_3 & +b_4 \\ f(b_4) & = & & b_2 & & +b_4 \end{cases} .$$

- (i) Nach welchem Satz ist f eindeutig bestimmt?
 (ii) Bestimmen Sie Kern f ! Gibt es einen Zusammenhang mit Teil (a) dieser Aufgabe ?
 (iii) Welchen Rang hat die Matrix $A = M_B^B(f)$ von f ?
 (iv) Geben Sie das volle Urbild des Vektors $w := b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4$ unter f an!

zu Seite 64 Zusätzliche Aufgabe zu 2.1:

Aufgabe L103 (Eigenwerte, Eigenvektoren, eindeutige Fortsetzbarkeit einer linearen Abbildung oder Satz von Hamilton-Caylay)

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $2 \neq 0$, und sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat f die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, so gilt $f^2 = \text{id}_V$.

Aufgabe L107 (Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit)

Beweisen Sie (ohne Verwendung des entsprechenden Satzes über symmetrische Matrizen), dass die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist!

Lösungshinweis: Zeigen Sie, dass die Matrix A drei verschiedene Eigenwerte besitzt! Eigenschaften von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten dürfen Sie unbewiesen benutzen.

zu Seite 67 Zusätzliche Aufgabe zu 2.2/2.3:

Aufgabe L106 (selbstadjungiert, Kern einer linearen Abbildung, Norm)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum, und sei $T : V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: $\ker T = \ker T^2$.

(b) Zeigen Sie allgemeiner: $\ker T = \ker T^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

zu Seite 70 Zusätzliche Aufgabe zu 2.5:

Aufgabe L104 (Mittelpunkt einer Strecke, Parallelität)

In der reellen euklidischen Ebene sei ein konvexes Viereck mit den Ecken (im Anti-Uhrzeigersinn angeordnet) E, F, G, H gegeben. Die Halbierungspunkte der Strecken $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HE}$ seien der Reihe nach mit A, B, C, D bezeichnet. Zeigen Sie: Die Punkte A, B, C, D , im Anti-Uhrzeigersinn angeordnet, sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

zu Seite 109 Zusätzliche Aufgabe zu 3.1:

Aufgabe A99 (Folgenkonvergenz) (Variante zu A2)

Gegeben sei die reelle Folge $(u_n)_{n=1,2,3,\dots}$ durch die Vorschrift:

$$u_1 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \text{ (für die Indizes } 1, 2, 3, \dots).$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Folge beschränkt ist!

(b) Besitzt sie einen Grenzwert? Wenn ja, warum?

(c) Bestimmen Sie, falls er existiert, ihren Grenzwert.

Hinweis zu (a): Schätzen Sie nach oben ab, indem Sie die letzte 2 in der Schachtelwurzel (hier ist die 2 unter dem Wurzelzeichen n -fach geschachtelt) durch die Zahl 4 ersetzen. Oder denken Sie an vollständige Induktion!

zu Seite 111 Zusätzliche Aufgabe zu 3.2:

Aufgabe A100 (mehrdim. Stetigkeit, Niveaulinien)

Mit der Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn} y := \frac{y}{|y|}$ für $y \neq 0$ und $\operatorname{sgn} 0 := 0$ sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definiert durch } f(x, y) = \min\{|x|, |y|\} \operatorname{sgn} y \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Skizzieren Sie das Niveaulinienbild dieser Funktion f , und geben Sie die Menge S ihrer Stetigkeitspunkte an!

zu Seite 112 /140: Zusätzliche Aufgabe zu 3.3/ 4.2:

Aufgabe A101 (Potenzreihe, cos, Integral) (Variante zu A91)

Betrachten Sie auf der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen die Funktion

$$f \text{ mit } f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ für } x \neq 0 \text{ und } f(0) = \frac{1}{2}.$$

(a) Wo ist f stetig, wo unstetig?

(b) Existiert das Integral $\int_0^1 f(x) dx$? Falls ja, warum?

(c) Bestimmen Sie im Existenzfall ein Intervall mit einer Länge kleiner als 10^{-5} , von dem Sie garantieren können, dass es den numerischen Wert des Integrals enthält.

Hinweis: Entwickeln Sie \cos in eine Potenzreihe um $x = 0$.

zu Seite 114 Zusätzliche Aufgabe zu 3.4:

Aufgabe A102 (Differenzierbarkeit, Stetigkeit, \cos) (Variante zu A44)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert als

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist. Ist die abgeleitete Funktion auf ganz \mathbb{R} stetig? Falls nicht, bestimmen Sie die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte!

zu Seite 116 Zusätzliche Aufgabe zu 3.5:

Aufgabe A103 (Partielle Integration; uneigentliches Integral)

Es sei $\lambda > 0$ vorgegeben.

a) Finden Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion zu $xe^{-\lambda x}$.

b) Berechnen Sie $\int_0^b xe^{-\lambda x} dx$ für $b > 0$.

c) Bestimmen Sie damit $\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b xe^{-\lambda x} dx$.

Lösungshilfe:

Sie dürfen hier ohne eigenen Beweis verwenden, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} be^{-\lambda b} = 0$ gilt.

Bemerkung: Auf diese Weise berechnet man den Erwartungswert der Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$. Diese hat die Dichtefunktion f mit $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$. (Sie ist ein Analogon zur geometrischen Verteilung für den Fall stetiger Zeit.)

zu Seite 167 Zusätzliche Aufgaben zu 5.1:

Aufgabe W53 (Binomialverteilung)

Gerda wirft n mal eine ideale Münze (mit den Seiten Wappen und Zahl), ebenso Hans. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide gleich oft das Ergebnis Wappen haben? Welchen numerischen Wert hat diese Wahrscheinlichkeit im Falle $n = 3$?

Aufgabe W55 (Baumdiagramm, Rückwärtsschließen, Vierfeldertafel, Formel von Bayes)

Viele Jugendliche ohne Hauptschulabschluss.

Von den Jugendlichen, die Ende des Schuljahres 2011 die Haupt- bzw. Realschule mit oder ohne Abschluss verließen, waren 46,3% weiblich und 53,7% männlich. Ohne schulischen Abschluss blieben dabei rd. 7,6% der Abgängerinnen und rd. 10% der Abgänger.

Zahlen gemäß Statistischem Bundesamt, Wiesbaden 2013

- (a) Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm und eine Vierfeldertafel! Berechnen Sie dann rückwärts die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine aus den Absolventen mit Abschluss zufällig herausgegriffene Person weiblich ist. (Dabei dürfen Sie hier die relativen Häufigkeiten als die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten nehmen.)
- (b) Berechnen Sie p erneut, diesmal mithilfe der Formel von Bayes!

zu Seite 170 Zusätzliche Aufgabe zu 5.3:

Aufgabe W54 (Produktraum, Gleichverteilung)

- (a) Anton und Berta greifen unabhängig voneinander je eine zufällige reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1)$ heraus; (die Zufallszahlen seien gleichförmig verteilt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden herausgegriffenen Zahlen kleiner als 1 ist?
- (b) Berta und Anton wollen sich am Goethe-Denkmal zwischen 10 und 11 Uhr am Vormittag treffen. Anton kommt irgendwann zwischen 10 und 11 Uhr und wartet genau 20 Minuten, sofern er nicht später als 20 Minuten vor 11 Uhr kommt. Kommt er später als 20 Minuten vor 11 Uhr an, so geht er um 11 Uhr wieder weg. Ebenso, unabhängig von ihm, macht es Berta. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einander wirklich treffen?
Anregung: Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt anhand einer Skizze!

zu Seite 172 Zusätzliche Aufgabe zu 5.6:

Aufgabe W56 (Konfidenzintervall)

Über eine Zufallsvariable X sei bekannt, dass sie normalverteilt ist.

- (i) Finden Sie ein Konfidenzintervall für $M = E(X)$ zum Fehlerniveau $\alpha = 1 - \gamma \approx 0,05$, wenn das Stichprobenmittel aus $n = 1600$ unabhängigen Proben gleich $0,43$ ist und die empirische Standardabweichung $s = 1$ ist!
- (ii) Wie groß muss n sein, damit das Konfidenzintervall zum Fehlerniveau $\alpha \approx 0,05$ um das Stichprobenmittel \bar{x} höchstens die Länge $0,09$ hat, wenn die Streuung $\sigma(X) = 1$ bekannt ist.

Hinweis: $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

zu Seite 216 Zusätzliche Aufgabe zu 7.1

(evtl. Ergänzung zu Aufg.E4):

Aufgabe E39 (Parallelprojektion oder Zentralprojektion)

Zeigen Sie (ohne Rückgriff auf Koordinaten), dass in einem affinen Raum $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ gilt:

- (a) $|g_1| = |g_2|$ für je zwei Geraden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$;
- (b) $|E| = |g|^2$ für jede beliebige Ebene $E \in \mathcal{E}$ und $g \in \mathcal{G}, g \subseteq E$.

Hinweis: Benutzt werden dürfen inzidenzgeometrische Eigenschaften von Geraden und Ebenen sowie das Euklidische Parallelenaxiom.

Aufgabe E40 siehe unten!

zu Seite 216 Zusätzliche Aufgabe zu 7.1

Aufgabe E41 (Dehnung)

- (a) Welche Typen von Dehnungen unterscheidet man?
- (b) In einem 3-dim affinen Raum \mathcal{A} sei eine Dehnung σ gegeben. Sei Z Fixpunkt von σ ! Zeigen Sie, dass jede Gerade durch Z Fixgerade ist.
- (c) Welche zentrische Streckung hat mehr als einen Fixpunkt?
(Mit Begründung !)

zu Seite 216 Zusätzliche Aufgabe zu 7.1

Aufgabe E42 (Ebene, Parallelität, Euklidisches Parallelenaxiom)

- (a) Unter welcher Bedingung schneiden sich in einem 3-dim affinen Raum zwei verschiedene Geraden g und h ?
- (b) Was versteht man in der affinen Geometrie unter einem (nicht-ausgearteten) Parallelogramm?
- (c) Begründen Sie: In einem 3-dim affinen Raum \mathcal{A} lässt sich jedes nicht-ausgeartete Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABDC$ ergänzen.

Lösungshinweis: Benutzt werden dürfen u.a. der Begriff der Parallelität und das Euklidische Parallelenaxiom.

zu Seite 217 Zusätzliche Aufgaben zu 7.2

Aufgabe E43 (Halbebene, Halbgerade, Strecke)

- (a) Unter welcher Bedingung liegen (definitionsgemäß) zwei Punkte R, S eines geordneten Inzidenzraums in der gleichen Halbebene mit Randgeraden g ?
- (b) Seien $g = PQ$ eine Gerade eines geordneten Inzidenzraumes \mathcal{I} und R Punkt von \mathcal{I} mit $R \notin g$. Begründen Sie für die Halbgerade PR^+ und die Halbebene PQR^+ die Beziehung

$$PR^+ \subseteq PQR^+ \cup PQ.$$

zu Seite 220 Zusätzliche Aufgabe zu 7.3/7.4 bzw. zu 7.5:

Aufgabe E40 (rechtwinkliges Dreieck, Hypotenusenlänge, Kongruenzsätze bzw. Geradenspiegelung)

Sei $SATB$ ein nicht-ausgeartetes konvexes Viereck der reellen euklidischen Ebene mit $|\overline{AS}| = |\overline{AT}|$ für die von A ausgehenden Seiten \overline{AS} und \overline{AT} sowie $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ATB| = R$ für die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle ATB$. Zeigen Sie (bzw. Zeigen Sie mittels Spiegelung): AB halbiert den Winkel $\sphericalangle SAT$!

Lösungshinweis: Sie dürfen den Satz über die Hypotenusenlänge und die Kongruenzsätze (bzw. Eigenschaften von Achsenspiegelungen) unbewiesen verwenden.

zu Seite 220 Zusätzliche Aufgabe zu 7.3/7.4:

Aufgabe E44 (Winkel und Parallelen)

Sei \mathcal{E} die reelle euklidische Ebene. Begründen Sie:

- (i) Freie Schenkel von kongruenten Strufenwinkeln sind parallel.
Genauer: Sind A, B, C, D, E Punkte von \mathcal{E} mit $A \neq B \neq D, D \in AB^+$ und $C \notin AB$ sowie $E \in ABC^+$. Gilt dann $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle EBD$, so sind AC und BE parallel. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass ein Schnittpunkt S existiert! Unterscheiden Sie zwei Fälle, je nach Lage von S .
- (ii) Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Hinweis: Benutzen Sie das Winkelantrags-Axiom, das Euklidische Parallelenaxiom und die Aussage von Aufgabenteil (i).
- (iii) Die Größe jeden Außenwinkels eines nicht-ausgearteten Dreiecks $\triangle ABC$ ist gleich der Summe der Größen der nicht-anliegenden Innenwinkel. *Hinweis:* Betrachten Sie eine Parallele zu AB durch C !
- (iv) Die Winkelsumme in jedem nicht-ausgearteten Dreieck hat die Größe $2R$.

Hinweis: Benutzt werden darf u.a. das Euklidische Parallelenaxiom, das Winkelantragsaxiom, Eigenschaften von Scheitelwinkeln, Wechselwinkeln und der Winkeladdition sowie die Aussage, dass in der absoluten Geometrie Innenwinkel eines Dreiecks nicht zu nicht-anliegenden Außenwinkeln des Dreiecks kongruent sein können.

zu Seite 220 Zusätzliche Aufgabe zu 7.3/7.4:

Aufgabe E45 (Dreieckskongruenz, Mittelsenkrechte)

Sei $\triangle ABC$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck der reellen euklidischen Ebene, dessen Höhe h_C durch C mit der Seitenhalbierenden s_C durch C übereinstimmt.

Zeigen Sie:

- (i) $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig.
- (ii) s_C ist auch Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.
- (iii) Die Seitenhalbierenden s_A und s_B haben die gleiche Länge.
- (iv) Der Schnittpunkt M von s_C mit der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AC}}$ existiert, und es gilt: $|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = |\overline{CM}|$.

Hinweis: Benutzt werden dürfen die Kongruenzsätze für Dreiecke und allgemeine Aussagen über Eigenschaften von Mittelsenkrechten.

zu Seite 220 Zusätzliche Aufgabe zu 7.3/7.4:

Aufgabe E46 (Kongruenz)

Sei $\diamond ABCD$ ein Drachenviereck der reellen euklidischen Ebene, also ein Viereck mit $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$, wobei C und D in verschiedenen

Halbebenen mit Randgeraden AB liegen. Seien ferner A und B in verschiedenen Halbebenen mit Rand CD . Begründen Sie:

- (i) $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.
- (ii) $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CAB|$.
- (iii) Die Diagonalen \overline{CD} und \overline{AB} stehen senkrecht aufeinander, und eine der Diagonalen wird durch den Schnittpunkt der Diagonalen halbiert.

Hinweis: Benutzt werden dürfen die Kongruenzsätze und Eigenschaften von Halbebenen.

Aufgaben E47- E49 siehe unten!

zu Seite 220 Zusätzliche Aufgabe zu 7.3/7.4:

Aufgabe E50 (rechth. Dreieck, Stufenwinkel, Strahlensätze)

In der reellen euklidischen Ebene sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck (mit rechtem Winkel bei C); sei C^* der Fußpunkt des Lotes von C auf AB und p das Maß des Hypotenusenabschnitts $\overline{AC^*}$. Seien ferner $F \in AC^+$ und $E \in AB^+$ mit $|\overline{AF}| = c := |\overline{AB}|$ bzw. $|\overline{AE}| = b := |\overline{AC}|$.

Anmerkung: Dabei bezeichnet AB^+ den Strahl (die Halbgerade), der Teil der Geraden AB ist, A als Scheitelpunkt hat und B enthält.

- (i) Betrachten Sie die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AFE$ und zeigen Sie: $\sphericalangle AEF$ ist ein rechter Winkel.
- (ii) Begründen Sie kurz: $CC^* \parallel EF$
- (iii) Wie folgt $c : b = b : p$ (und damit der Kathetensatz)?

Lösungshinweis: Sie dürfen unbewiesen verwenden: Eigenschaften von Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (speziell $c > b, c > p$ für die Skizze), die Kongruenzsätze, den Stufenwinkelsatz, die Strahlensätze.

zu Seite 222 Zusätzliche Aufgaben zu 7.5

Aufgabe E47 (Spiegelung, Lot)

In der reellen euklidischen Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ seien \mathfrak{k} ein Kreis mit Radius r (für ein $r > 0$) und Mittelpunkt M , ferner $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $M \in g$ und γ_g die (Geraden-)Spiegelung mit Achse g sowie $T \in \mathcal{P}$ mit $T \in g \cap \mathfrak{k}$.

Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $\gamma_g(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{k}$.
- (ii) Es gilt sogar $\gamma_g(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$.
- (iii) Ist h das Lot (die Senkrechte) durch T auf g , so gilt $\gamma_g(h) = h$.
- (iv) Für die Gerade h aus (iii) ist $h \cap \mathfrak{k}$ einelementig.

Für einen Extrapunkt:

(v) Begründen Sie: h ist Tangente in T an \mathfrak{k} .

Hinweis: Ohne Beweis dürfen benutzt werden: Allgemeine Eigenschaften von Geradenspiegelungen, die Existenz und Eindeutigkeit des Lots und die Aussage, dass eine Gerade einen Kreis in höchstens 2 Punkten schneidet. Nicht benutzt werden sollte die Orthogonalität der Tangente zum "Radius" im Berührungspunkt.

Aufgabe E48 (Spiegelung, Winkelhalbierende)

In der reellen euklidischen Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ seien ΔABC ein nicht-ausgeartetes Dreieck und w_A, w_B, w_C die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB, \sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$.

(i) Sei M Punkt von w_A im Innern von $\sphericalangle CAB$, ferner F der Fußpunkt des Lots von M auf AC sowie \mathfrak{k} der Kreis um M mit Radius $r = |\overline{MF}|$! Dass AB dann Tangente an \mathfrak{k} ist, darf hier vorausgesetzt werden. Zeigen sie AC ist Tangente an \mathfrak{k} .

(ii) Sei $\{S\} := w_A \cap w_C$ (die Existenz von S und die Lage im Innern von ΔABC können in dieser Aufgabe ohne Beweis vorausgesetzt werden); sei ferner ℓ das Lot von S auf AC .

Um welche Art Abbildung handelt sich bei

$$\gamma := \gamma_{w_A} \circ \gamma_{\ell} \circ \gamma_{w_C}$$

(wobei γ_h die Spiegelung an der Geraden h bezeichne)?

(iii) Zeigen Sie $\gamma(BC) = AB$.

(iv) Warum sind S und B Fixpunkte von γ , und was folgt daraus für γ ?

Für einen Extrapunkt:

(v) Begründen Sie die Aussage $SB = w_B$ (und damit, dass S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von ΔABC ist)!

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie u.a. allgemeine Eigenschaften von Spiegelungen, Aussagen über die Symmetrieachsen von Winkeln und Kreisen, die Existenz der Lote und den Dreispiegelungssatz.

Aufgabe E49 (Produkt spezieller Spiegelungen)

Seien g und h aufeinander senkrecht stehende Geraden der reellen euklidischen Ebene \mathcal{E} und $\{Z\} := g \cap h$. Bezeichne γ_g und γ_h die Spiegelung an der Geraden g bzw. h .

(i) Begründen Sie in zwei Sätzen, warum die Abbildung $\delta := \gamma_h \circ \gamma_g$ eine Bewegung ist.

(ii) Hat δ einen Fixpunkt?

(iii) Sei P ein Punkt von \mathcal{E} mit $P \notin g \cup h$, sei $P' := \gamma_g(P)$, und sei F der Fußpunkt des Lots von P auf g ; dann sind die Dreiecke ΔPZF und $\Delta P'ZF$ kongruent. Begründen Sie dies!

- (iv) Bestimmen Sie $\sphericalangle P'ZP''$ und $\sphericalangle PZP''$ für $P'' := \delta(P)$ in Abhängigkeit von $\alpha := |\sphericalangle PZF|$.

Für zwei Extrapunkte:

- (v) Begründen Sie, warum δ eine Punktspiegelung ist.

Hinweis: Ohne Beweis benutzt werden dürfen allgemeine Eigenschaften von Bewegungen, insbesondere Spiegelungen, von rechten und gestreckten Winkeln sowie der Winkelsubtraktion.

Nicht benutzt werden darf in der Aufgabe die Aussage, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Drehung oder eine Translation ist (oder Ähnliches, z.B. Aussagen über Zusammenhang Drehwinkel mit Winkel zwischen den Spiegelungsachsen)

Aufgabe E51 (Deckabbildung, Spiegelung)

Sei $Q = \square ABCD$ ein Quadrat in der reellen euklidischen Ebene. Zeigen Sie: Eine Deckabbildung $\sigma \neq \text{id}$ von Q , die den Punkt A fest lässt, existiert, ist eine Geradenspiegelung und eindeutig bestimmt. *Lösungshinweis:* Allgemeine Eigenschaften von Deckabbildungen, (definierende) Eigenschaften von Spiegelungen sowie Aussagen über Eigenschaften der Diagonalen eines Quadrats dürfen Sie unbewiesen benutzen.

Aufgabe E52 (Parallelität, Translationen)

In einer affinen Ebene E seien ℓ_1, ℓ_2, s_1 und s_2 paarweise verschiedene Geraden mit $\ell_1 \parallel \ell_2$ und $s_1 \parallel s_2$ sowie $\ell_1 \not\parallel s_1$,

- (i) (2 Punkte) Mit welchen Eigenschaften der Parallelitätsrelation lässt sich $\ell_2 \not\parallel s_2$ (z.B. per Widerspruchsbeweis) herleiten?
- (ii) (2 Punkte) Begründen Sie (u.a. mithilfe von (i)): s_1 und s_2 schneiden jeweils ℓ_1 und ℓ_2 .
- (iii) (3 Punkte) Seien $S_i := s_i \cap \ell_i$ für $i \in \{1, 2\}$, ferner $T_1 := \ell_2 \cap s_1$, und $T_2 := \ell_1 \cap s_2$. Seien nun $\tau_1 := \tau_{S_1 T_1}$ die Translation, die S_1 auf T_1 abbildet, und $\tau_2 := \tau_{S_2 T_2}$ die Translation, die S_2 auf T_2 abbildet. Geben Sie $(\tau_1 \circ \tau_2)(S_1)$ an! Zur Begründung reicht hier die Angabe des Namens der angewandten Regel!
- (iv) (3 Punkte) Warum wird T_1 durch $\tau_1 \circ \tau_2$ auf einen Punkt abgebildet, der auf der zur Geraden $S_1 S_2$ parallelen Geraden durch T_1 liegt? (Stichwort: 'Spur')

Aufgabe E53 (Kongruenzsätze, Parallelogramm, Wechselwinkel)

- (a) (5 Punkte) Beweisen Sie mithilfe von Kongruenzbetrachtungen an zwei geeigneten Dreiecken (z.B. $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$) den Satz:
In einem Rechteck der Euklidischen Ebene sind die beiden Diagonalen gleich lang.
Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier den Kongruenzsatz SWS verwenden und die Tatsache, dass in einem Rechteck gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge haben.

- (b) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass in einem Quadrat der Euklidischen Ebene die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Lösungshilfe: Sie dürfen Teil (a) benutzen und ohne Beweis die Aussage, dass sich in einem Quadrat die Diagonalen halbieren (und alle Seiten die gleiche Länge haben).

Aufgabe E54 (Winkelhalbierende, Lot)

- (i) (6 Punkte) Sei Δ ein Dreieck in der reellen Euklidischen Ebene. Zeigen Sie: Die Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und eines anliegenden Außenwinkels sind orthogonal zueinander.

(Dabei dürfen Sie unbewiesen benutzen, dass eine der Dreiecksseiten im Innern des von beiden Winkelhalbierenden gebildeten Innenwinkels liegt.)

- (ii) (4 Punkte) In der reellen Euklidischen Ebene seien P ein Punkt und g eine Gerade mit $P \notin g$. Eine Konstruktion der Parallelen zu g durch P erfolgt folgendermaßen: Man fällt das Lot ℓ von P auf g und errichtet dann das Lot h auf ℓ in P .

Nach welchem Satz ist h parallel zu g ?

Lösungshinweis: Die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Konstruktion ist hier nicht zu diskutieren; allein die Angabe der Bezeichnung eines Satzes ist hier erwartet.

Aufgabe E55 (Mittelsenkrechte, Tangente, Kreis)

Seien $\Delta := \Delta ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck in der Euklidischen Ebene E und k ein Kreis durch A, B und C mit Radius r und Mittelpunkt M . Zu behandeln sind Eigenschaften von k und seinen Sekanten und Tangenten:

- (i) (3 Punkte) Begründen Sie: Der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten von $\Delta := \Delta ABC$ ist der Mittelpunkt M des Umkreises von ΔABC .

Lösungshinweis: Eigenschaften der Punkte auf der Mittelsenkrechten einer Strecke dürfen Sie hier unbewiesen benutzen, ebenso die Existenz von U und seine Lage im Innern des (spitzwinkligen) Dreiecks und die Existenz und Eindeutigkeit des Umkreises von Δ .

- (ii) (5 Punkte) Sei g eine Gerade von E , und seien P, Q, R Punkte von g und N ein weiterer Punkt von E mit $N \notin g$. Begründen Sie: Die Abstände $\overline{NP}, \overline{NQ}, \overline{NR}$ der Punkte P, Q, R von N können nicht alle gleich sein..

- (iii) (2 Punkte) Begründen Sie: Jede Gerade h aus E durch M schneidet k in genau zwei Punkten.

Aufgabe E56 (Schnitte von Geraden und Ebenen, Parallelität, Translation)

- (a) (5 Punkte) Seien E eine Ebene in einem 3-dim affinen Raum $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ und $h_1 \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $h_1 \subseteq E$, ferner

$$S := \{g \in \mathcal{G} \mid g \subseteq E \wedge g \parallel h_1\}$$

die Parallelenschar aller Geraden von E , die parallel zu h_1 sind.
 Sei f_1 eine Gerade aus E mit $f_1 \parallel h_1$. Begründen Sie:

$$|S| = |f_1| = |h_1|.$$

Lösungshinweis: Die Gleichheit der Mächtigkeiten der Geraden von E dürfen Sie unbewiesen voraussetzen. Betrachten Sie z.B. $g \cap f_1$ für $g \in S$.

- (b) (5 Punkte) Seien (T, \circ) die Gruppe der Translationen eines 3-dim affinen Raumes $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ und $\tau \in T$ eine nicht-triviale Translation! Zeigen Sie (ohne Verwendung der zu beweisenden Tatsache bzw. der Parallelgrammkonstruktion aus der Vorlesung bzw. dem Skript):

$$\tau \text{ lässt alle Spuren } P\tau(P) \text{ (mit } P \in \mathcal{P}) \text{ fix.}$$

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie andere Eigenschaften von Translationen unbewiesen verwenden. Formen Sie z.B. $\tau(P\tau(P))$ um und begründen Sie $\tau(P)\tau^2(P) = P\tau(P)$ durch Betrachten der beiden parallelen Geraden und ihres Schnittes !

Aufgabe E57 (Kongruenzsätze, Parallelogramm, Wechselwinkel)

- (a) Ein Parallelogramm $\mathcal{P} = \diamond ABCD$ in der euklidischen Ebene ist definiert als ein Viereck, in dem nicht-benachbarte Seiten parallel sind.

Begründen Sie (ohne Verweis auf den entsprechenden Satz von Vorlesung und Übungen), dass in dem Parallelogramm \mathcal{P} gilt:

- (i) (1 Punkt) Die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACD$ sind kongruent.
- (ii) (1 Punkt) Gegenüberliegende Seiten von \mathcal{P} sind kongruent .
- (iii) (3 Punkte) Die Diagonalen von \mathcal{P} halbieren sich.

Lösungshinweis: Dabei dürfen Sie hier unbewiesen voraussetzen, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen existiert und innerhalb des Parallelogramms liegt. Betrachten Sie z.B. $\triangle ABM$ und $\triangle CDM$!

- (b) (5 Punkte) Ein Raute (Rhombus) ist ein ebenes Viereck, in dem alle vier Seiten kongruent sind. Zeigen Sie: In jeder Raute $\mathcal{R} = \diamond ABCD$ stehen die Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} aufeinander senkrecht.

Hinweis: Hier dürfen Sie unbewiesen voraussetzen, dass \mathcal{R} ein Parallelogramm ist (und sich daher die Diagonalen halbieren) und der Schnittpunkt M der Diagonalen der Raute innerhalb der Raute liegt.

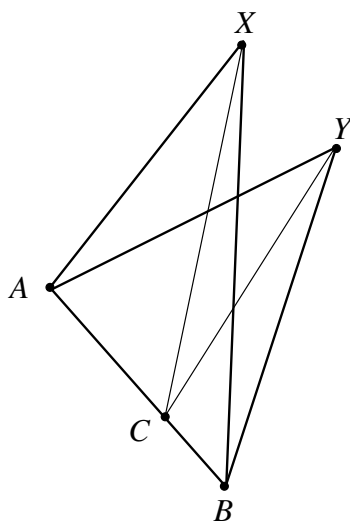
Aufgabe E58 (Dreieckskongruenz)

Beweisen Sie für den 3-dim euklidischen Raum:

Seien A, B, C, X, Y fünf verschiedene Punkte derart, dass A, B, C kollinear sind, X und Y nicht auf AB liegen und $\overline{AX} \equiv \overline{AY}$ sowie $\overline{BX} \equiv \overline{BY}$ gilt (und o.B.d.A. $C \in AB^+$) (vgl. die Skizze)! Dann folgt $\overline{CX} \equiv \overline{CY}$.

Zeigen Sie dies entsprechend dem Folgenden:

- (i) (4 Punkte) Welche Beziehung besteht zwischen den Dreiecken $\triangle AXB$ und $\triangle AYB$? (Mit Begründung!)
- (ii) (1 Punkt) Was folgt daraus für die Winkel $\sphericalangle XAB$ und $\sphericalangle YAB$?
- (iii) (4 Punkte) Nach welchem Satz sind daher die Dreiecke $\triangle AXC$ und $\triangle AYC$ kongruent.
- (iv) (1 Punkt) Vervollständigen Sie den Beweis.



Skizze zu Aufgabe E58

Aufgabe E59 (Tangente, Kreis, Dreieckskongruenz)

In der reellen euklidischen Ebene sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , ferner seien P ein Punkt außerhalb k und t_1 und t_2 die Tangenten von P an k mit den Berührungspunkten B_1 und B_2 . (Die Existenz von t_i und B_i und weitere Eigenschaften der Tangenten dürfen hier vorausgesetzt werden.)

- (i) (2 Punkte) Begründen Sie durch Zitat eines Satzes: Es gilt $MB_i \perp t_i$ für $i = 1, 2$.
- (ii) (4 Punkte) Nach welchem Kongruenzsatz sind die Dreiecke $\triangle MB_1P$ und $\triangle MB_2P$ kongruent?
- (iii) (1 Punkt) Was folgt für die Winkel $\sphericalangle MPB_1$ und $\sphericalangle MPB_2$ und für $|\overline{PB_1}|$ und $|\overline{PB_2}|$?
- (iii) Welche Beziehungen hat MP zum Dreieck $\triangle B_1PB_2$? (Höhe, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte?)

Aufgabe E60 (Kongruenzsätze, Parallelogramm, Rechteck, Stufenwinkel)

Gegeben sei ein Parallelogramm $\Pi := \diamond ABCD$ (d.h. ein Viereck mit Eckpunkten A, B, C, D mit parallelen gegenüber liegenden Seiten) der Euklidischen Ebene. Beweisen Sie, wie unter (i) bis (iv) angegeben, folgenden Satz:

Sind die Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} von Π gleich lang, so ist Π ein Rechteck.

Lösungshinweis : Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass im Parallelogramm gegenüberliegende Seiten kongruent sind.

- (i) (2 Punkte) Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ sind kongruent. Dies folgt aus einem Kongruenzsatz, nämlich welchem? Geben Sie hier (ohne Beweis) nur die Kurzform des Kongruenzsatzes an! (SWS oder WSW oder SSS oder SsW)!
- (ii) (1 Punkt) Was folgt aus dieser Kongruenz für die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$?
- (iii) (2 Punkte) Nach welchem Satz sind die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ kongruent?
- (iv) (3 Punkte) Welche weitere Beziehung besteht zwischen den Winkeln $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ und was folgt daraus für die Größe von $\sphericalangle ABC$?
- (v) (2 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis!

Aufgabe 61 (Winkel, Winkelhalbierende, Abstand, Lot, Kongruenzsätze)

In der reellen Euklidischen Ebene sei ein Winkel $\alpha = \sphericalangle AOB$ (ungleich Nullwinkel und gestrecktem Winkel) gegeben, außerdem die Winkelhalbierende w_α .

- (a) Jeder Punkt R der Winkelhalbierenden w_α von α hat von den beiden Schenkeln $p := OA^+$ und $q := OB^+$ den gleichen Abstand (Länge der Strecke von R zum Lotfußpunkt $S \in p$ bzw. $T \in q$ auf den betreffenden Schenkeln). Zeigen Sie dies wie folgt:
 - (i) (3 Punkte) Betrachten Sie die Innenwinkel der Dreiecke $\triangle OSR$ und $\triangle OTR$ für die Lotfußpunkte S und T . (Dabei dürfen Sie hier ohne Beweis die Existenz der Lotfußpunkte S und T und deren Lage auf den Schenkeln benutzen, ferner die Tatsache, dass die Winkelsumme im Dreieck konstant gleich $2R$ ist und damit bei zwei gegebenen Größen der Innenwinkel die Größe des dritten Innen-Winkels festliegt.)
 - (ii) (3 Punkte) Vollenden Sie den Beweis!
- (b) (4 Punkte) Im Winkel $\alpha = \sphericalangle AOB$ seien nun A und B so gewählt, dass $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ gilt, und sei M der Mittelpunkt von \overline{AB} . Zeigen Sie mittels Kongruenzbetrachtungen, dass für die Winkelhalbierende von Winkel α gilt: $w_\alpha = OM^+$.

Aufgabe 62 (Mittelsenkrechte, Tangente, Kreis, Hypotenuse)

Sei k ein Kreis in der reellen Euklidischen Ebene E mit Radius r und Mittelpunkt M ! Zu behandeln sind Eigenschaften von k und seinen Sekanten und Tangenten:

- (i) (5 Punkte) Begründen Sie die folgende Konstruktion des Mittelpunkts M von k : Seien A, B, C drei Punkte auf k . Dann ist $M = m_{AB} \cap m_{BC}$.

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass jede Gerade der Ebene den Kreis k in höchstens 2 Punkten schneidet, dass durch 3 Punkte höchstens ein Kreis geht und dass sich die Mittelsenkrechten eines nicht-ausgearteten (!) Dreiecks in einem Punkt schneiden.

- (ii) (5 Punkte) Sei P ein Punkt von k . Beweisen Sie: Eine Gerade g der Ebene mit $P \in g \cap k$ und $g \perp MP$ ist Tangente an k (also eine Gerade g mit $|g \cap k| = 1$) mit Berührungspunkt $P \in g \cap k$.

Lösungshinweis: Betrachten Sie ΔPMR für ein geeignet angenommenes R ! Eigenschaften der Längen von Hypotenuse und Katheten eines Dreiecks dürfen Sie unbewiesen verwenden.

4.2 Lösungsskizzen

zu Aufg. L102

- (a) Das homogene Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix $A(t)$ ist nur für $t = 0$ nicht-trivial lösbar: Notwendig und hinreichend für die nicht-triviale Lösbarkeit ist die Singularität der Matrix $A(t)$. Es ist

$$0 = \det A(t) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = t.$$

Für alle anderen t hat die Matrix also vollen Rang.

Im Falle $t = 0$ erhält man durch elementare Zeilenumformungen

$$A(0) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

damit kann man die allgemeine Lösung so parametrisieren:

$$x_1 = s, \quad x_2 = -2s, \quad x_3 = s;$$

hierbei durchläuft s die Elemente des zugrundeliegenden Körpers. Die Lösungsmenge ist eine Gerade.

- (b) Ja, das kann vorkommen! Beispiel: $x + y + z = 1 \wedge x + y + z = 2$ (oder das LGS anderer paralleler Ebenen).

- (c) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \wedge 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \wedge 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ (vgl. L37 (v) p.261.)

zu Aufg. L103

Wegen $\text{char } K \neq 2$ ist $\lambda_1 = 1 \neq -1 = \lambda_2$. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, existiert eine Basis $B = (v_1, v_2)$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Für diese gilt:

$$f^2(v_i) = f(\lambda_i v_i) = \lambda_i^2 v_i = v_i \text{ für } i = 1 \text{ und } i = 2.$$

Die Behauptung folgt nun aus $f^2|_B = \text{id}|_B$ wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit einer auf eine Basis gegebenen linearen Abbildung.

Alternativ kann man auch so argumentieren: Die f bzgl. der Basis B darstellende Matrix hat die Gestalt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und man sieht, dass A^2 die Einheitsmatrix ist.

Weitere Möglichkeit: Es ist $\chi_f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 1$ das charakteristische Polynom von f ; nach dem Satz von Hamilton-Cayley folgt daraus $f^2 - \text{id} = 0$.

zu Aufg. L104

Man fixiere einen Koordinaten-Ursprung in der Ebene und ordne den Punkten E, A, F, B, G, C, H, D in sich anbietender Notation die Ortsvektoren e, a, f, \dots usw. zu. Dann ist

$$b - a = \frac{g+f}{2} - \frac{e+f}{2} = \frac{g-e}{2} \quad \text{und} \quad c - d = \frac{g+h}{2} - \frac{e+h}{2} = \frac{g-e}{2}.$$

Die gegenüberliegenden Seiten \overline{BA} und \overline{CD} des neuen Vierecks sind also parallel zueinander und gleich lang. Analog zeigt man dies für die Seiten \overline{CB} und \overline{DA} .

zu Aufg. L105

(a) Es ist $(Tf_1)(x) = 1$, $(Tf_2)(x) = x + 1$, $(Tf_3)(x) = x^2 + 2x + 1$ und $(Tf_4)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; daher

$$A = M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $(T^{-1}f)(x) = f(x-1)$.

(c) Wegen (b) und $M_B^B(T)^{-1} = M_B^B(T^{-1})$ ist die gesuchte Inverse (analog zu Teil (a) bestimmbar):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

zu Aufg. L106

Jeweils ist " \subseteq " klar.

(a) Sei $x \in \ker T^2$, also $T^2(x) = 0$. Es folgt

$$0 = \langle T^2x, x \rangle = \langle Tx, T^*x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2, \quad \text{also auch} \quad Tx = 0.$$

(b) Aus (a) folgt $\ker T = \ker T^{2^m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist also $1 \leq n \leq 2^m$, so erhält man

$$\ker T \subseteq \ker T^n \subseteq \ker T^{2^m} = \ker T.$$

zu Aufg. L107

Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \begin{vmatrix} a-x & c & 0 \\ c & b-x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{a+b}{2} - x\right) [(a-x)(b-x) - c^2].$$

Die Eigenwerte genügen damit den Gleichungen

$$\lambda = \frac{a+b}{2} \text{ oder } \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 = 0$$

und sind damit $\lambda_1 = \frac{a+b}{2}$ und

$$\lambda_{2/3} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab + c^2} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \in \mathbb{R}.$$

Falls der Radikand ungleich 0 ist, sind die drei Eigenwerte verschieden und zugehörige Eigenvektoren linear unabhängig; damit existiert eine Eigenbasis von A , und A ist diagonalisierbar.

Ist der Radikand gleich 0, so ist $c = 0$ (und $a = b$), folglich A schon von Diagonalform. \square

zu Aufg. L108

Mit dem injektiven Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ zeigen wir, dass für eine Basis $B = (b_i)_{i \in I}$ von V die Vektoren aus $C := f(B)$ linear unabhängig sind und damit C (nach dem Basisergänzungssatz) zu einer Basis C' von W erweitert werden kann; da f nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $|B| = |C| \leq |C'|$ und damit $\dim_K V = |B| \leq |C'| = \dim_K W$.

Die Vektoren von C sind linear unabhängig, da sich aus $\sum_{i \in I} f(b_i)\lambda_i = 0$ (mit fast allen $\lambda_i = 0$) wegen der Linearität von f dann $f(\sum_{i \in I} b_i\lambda_i) = 0$ und wegen der Injektivität von f auch $\sum_{i \in I} b_i\lambda_i = 0$ mit linear unabhängigen Vektoren b_i ergibt, woraus $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt. \square

zu Aufgabe L109

Sei $U = b_3K$, also $B_U = \{b_3\}$ eine Basis von U . Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle \cap U = \{0\}$ ist b_3 von b_1 und b_2 linear unabhängig; daher bilden b_1, b_2, b_3 eine Basis B des 3-dim Vektorraums V .

Da f linear ist, folgt aus $f(b_1 + b_2) = 2b_1$ und $f(b_1 - b_2) = 2b_2$ unmittelbar $f(b_1) + f(b_2) = 2b_1$ und $f(b_1) - f(b_2) = 2b_2$, was äquivalent zu

$$f(b_1) = b_1 + b_2 \quad \text{und} \quad f(b_2) = b_1 - b_2$$

ist. Konstruktionsgemäß gilt ferner $f(b_3) = 0$.

Damit erhält man:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M_B^B(f^2) = M_B^B(f) \cdot M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ erhält man $M_B^B(f^2)$ auch aus $f^2(b_1) = f(b_1 + b_2) = f(b_1) + f(b_2) = 2b_1$ und $f^2(b_2) = f(b_1 - b_2) = f(b_1) - f(b_2) = 2b_2$.

zu Aufgabe L110 Wir zeigen, dass $B_{V/U}$ (i) linear unabhängig und (ii) ein Erzeugendensystem von V/U ist. Natürlich sind die Elemente von $B_{V/U}$ Vektoren aus V/U .

(i) Gegeben sei eine Linearkombination des Nullvektors von V/U , also von U , mit Elementen aus $B_{V/U}$:

$$U = \sum_{i \in I} (d_i + U)\lambda_i \text{ (mit } d_i \in (B \setminus B_U) \text{ und } \lambda_i \in K \text{ sowie einer geeigneten Indexmenge } I.)$$

Es folgt $U = \sum_{i \in I} d_i \lambda_i + U$ und daraus $v = \sum_{i \in I} d_i \lambda_i \in U$. Wären die λ_i nicht alle 0, so hätte, da $B_U \cap D = \emptyset$ und B_U Basis von U ist, der Vektor v zwei verschiedene Darstellungen mit Elementen aus B , ein Widerspruch. Also ist die gewählte Linearkombination trivial; und $B_{V/U}$ ist linear unabhängig.

(ii) Ist w Element von V/U , so existiert ein $v \in V$ mit $w = v + U$. Da $B = B_U \cup D$ Basis von V ist, existiert eine Darstellung $v = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i + \sum_{j \in J} d_j \mu_j$ mit $c_i \in B_U$ und $d_j \in B \setminus B_U$.

Wir erhalten: $w = v + U = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i + \sum_{j \in J} d_j \mu_j + U = \sum_{j \in J} d_j \mu_j + U$ (wegen $c_i \in U$), also $w = \sum_{j \in J} (d_j + U)\mu_j$. Daher ist $B_{V/U}$ Erzeugendensystem von V/U .

Insgesamt folgt, dass $B_{V/U}$ eine Basis von V/U ist.

zu Aufg.L111 (a) Die zu (*) gehörende Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

geht durch elementare Zeilenumformungen (z.B. mit $z_4 \mapsto z_4 - z_1 - z_2$ und $z_3 \mapsto z_3 - z_2$) in die Matrix (in Zeilenstufenform)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

mit gleichem Lösungsraum über. Für das homogene System erhält man die Bedingungen $\xi_3 = \xi_4 = -\xi_2 = -\xi_1$, woraus

$$L_0 = (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R}$$

folgt.

Eine Partikulärlösung ergibt sich aus $\xi_3 = \xi_4 = 1 - \xi_2 = 1 - \xi_1$ zum Beispiel als $p = (1, 1, 0, 0)$.

Aus $L = p + L_0$ erhält man somit

$$L = (1, 1, 0, 0) + (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - \xi, 1 - \xi, \xi, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}.$$

- (b) (i) Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung ist eine lineare Abbildung schon durch die Bilder der Vektoren einer geordneten Basis des Urbildraumes bestimmt. Also ist f eindeutig bestimmt.
(ii) Die Matrix von f bzgl. der Basis B hat als Spalten die Koordinaten der Bilder der Vektoren von B . Sie ist somit

$$A := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems aus Teil (a). Daher besteht $\text{Kern } f$ aus allen Vektoren, deren Koordinatenvektoren bzgl. der Basis B in der Lösungsmenge L_0 des zu (*) gehörenden homogenen linearen Gleichungssystems liegen.

Also gilt: $\text{Kern } f = (-b_1 - b_2 + b_3 + b_4)\mathbb{R}$.

(iii) Wie man aus (ii) sieht, ist $\dim \text{Kern } f = 1$, somit (nach der entsprechenden Dimensionsformel)

$$\text{Rang } A = 4 - \dim \text{Kern } f = 3.$$

(iv) Die Koordinatenvektoren der Vektoren des vollen Urbildes von w sind genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems (*) aus Teil (a) und damit die Elemente von L . Also folgt

$$f^{-1}(w) = b_1 + b_2 + (-b_1 - b_2 + b_3 + b_4)\mathbb{R}.$$

zu Aufg. A99

Aus dem Hinweis ergibt sich, dass $0 < u_n < 2$ ist für alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Offensichtlich wächst die Folge monoton. Also konvergiert sie.

Aus der rekursiven Definition der Folge folgt für ihren Grenzwert α aus Stetigkeitsgründen die Gleichung $\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$, deren Auflösung uns (über $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ und $\alpha > 0$) den Grenzwert $\alpha = 2$ liefert.

zu Aufg. A100

Das Niveaulinienbild ist spiegelsymmetrisch zur Koordinatenachse $x = 0$. Es genügt also, die rechte Halbebene $x \geq 0$ zu betrachten. Im positiven Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$ liegen die Punkte mit $(\min\{x, y\}) = f(x, y) = c > 0$

auf den vom Punkt (c, c) parallel zu den Koordinatenachsen ins Unendliche laufenden Strahlen. Im Quadranten $x \geq 0, y \leq 0$ ist $(-\min\{x, |y|\} =)$
 $f(x, y) = c < 0$ längs der vom Punkt $(-c, c)$ parallel zu den Koordinatenachsen ins Unendliche laufenden Strahlen. Das Bild der Niveaulinien (ohne die Werte der Niveaus) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Die (erlaubte) koordinatenweise Grenzwertbetrachtung $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y$ zeigt im 1. Quadranten

$$f(\xi, \eta) = \min\{\xi, \eta\} \rightarrow \min\{x, y\} = f(x, y).$$

Für die anderen Quadranten folgt die Stetigkeit hiermit aus Symmetriegründen. Also gilt $S = \mathbb{R}^2$.

zu Aufg. A101 (a) Als Quotient stetiger Funktionen mit von 0 verschiedenen Werten ist f für $x \neq 0$ stetig. Durch Potenzreihenentwicklung der \cos -Funktion ($\cos x = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(2v)!}$) findet man an der Stelle 0 den Grenzwert $1/2$; (alternativ durch Entwicklung nach de l'Hospital). Also ist $f(x)$ auch bei $x = 0$ stetig.

(b) Wegen der Stetigkeit der Funktion f ist sie (nach einem Satz) auf jedem beschränkten Intervall integrierbar.

(c) Mittels der Potenzreihe des Cosinus ergibt sich durch (für die gleichmäßig konvergierende Potenzreihe

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \sum_1^{\infty} \frac{x^{2v-2}}{2v!} (-1)^v$$

erlaubte) gliedweise Integration der Wert des Integrals als alternierende Leibniz-artige Reihe:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!} - \frac{1}{7 \cdot 8!} + \dots$$

Die Glieder $(-1)^v \frac{x^{2v-1}}{(2v-1)(2v)!}$ der Reihe sind betragsmäßig monoton fallend. Wegen $7 \cdot 8! = 282240 > 10^5$ muss man bis zum entsprechenden Summanden addieren. Der gesuchte Wert liegt somit zwischen $\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!} - \frac{1}{7 \cdot 8!}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!}$. Rundung nach außen gibt dann als mögliche Lösung das Intervall $(0.486385, 0.486389)$, das die Länge $4 \cdot 10^{-6}$ hat.

zu Aufg. A102

Für $x \neq 0$ findet man (mittels Produktregel) $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Für $x = 0$ und $h \neq 0$ ist $\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = h \sin \frac{1}{h}$, und dieser Differenzenquotient strebt für $h \rightarrow 0$ gegen Null. Also ist $f'(0) = 0$. Die Funktion f ist also auf ganz \mathbb{R} differenzierbar.

Man sieht nun sofort, dass f an der Stelle $x = 0$ unstetig, sonst aber überall stetig ist.

zu Aufg. A103

a) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int x e^{-\lambda x} dx &= x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} [(x e^{-\lambda x} - \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x})] + c \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} (x + \frac{1}{\lambda}) + c.\end{aligned}$$

b) Aus a) ergibt sich

$$\int_0^b x e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} (x + \frac{1}{\lambda}) \Big|_0^b = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} (b + \frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Mit b) und der Lösungshilfe erhält man

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} (b + \frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{\lambda^2}] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

zu Aufg. W53

Für $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ist

$$w_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k} \cdot 2^{-n} \binom{n}{k} = 2^{-2n} \binom{n}{k}^2$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl Gerda als auch Hans genau k mal das Ergebnis Wappen haben. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit gleich $w = \sum_{k=0}^n w_k$.

(Mit diesem Ergebnis sollte der Korrektor zufrieden sein.)

Mit der binomischen Formel für $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$, Cauchy-Multiplikation der beiden Summen für $(1+x)^n$ und Vergleich der Koeffizienten von x^n kommt man auf

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} x^m &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^\ell = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} x^n + \dots\end{aligned}$$

Es ergibt sich (zu dieser Identität vgl. man auch Aufgabe A27 !):

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

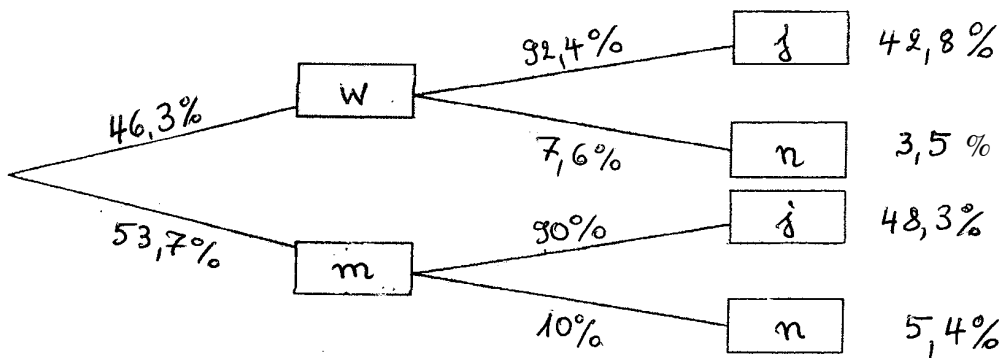
und damit im vorliegenden Fall $w = 4^{-n} \binom{2n}{n}$.

Für $n = 3$ findet man $w = 20/64 = 0.3125$.

zu Aufg. W54 Sinnvoll ist die geometrische Behandlung im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Als die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann man den Flächeninhalt der Figur nehmen, die durch die Ungleichungen $0 \leq x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ im Fall (a) (bzw. $|y - x| \leq 20/60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ für Teil (b)) bestimmt ist. Dieser Flächeninhalt hat im Fall (a) den Wert $1/2$, im Fall (b) den Wert

$1 - (2/3)^2 = 5/9$; auf den Wert im Falle (b) kommt man so: Die bedingten Ungleichungen schneiden aus dem Einheitsquadrat links oben und rechts unten je ein gleichseitiges rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $2/3$ (und Inhalt jeweils $1/2 \cdot 2/3 \cdot 2/3$) aus.

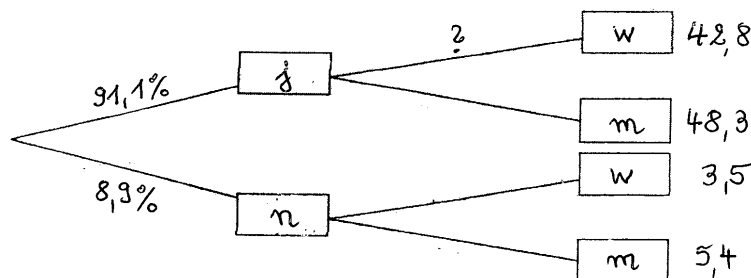
zu Aufg. W55 (a) Aus den Angaben erhält man folgendes Baumdiagramm
(mit $w \hat{=}$ weiblich, $m \hat{=}$ männlich, $j \hat{=}$ mit Abschluss, $n \hat{=}$ ohne Abschluss):



Die Wahrscheinlichkeit der Pfade (des Auftretens beider Merkmalausprägungen) liefern die Einträge in die **Vierfeldertafel:**

	Abschl. ja	Abschl. nein	gesamt
Geschlecht "w"	42,8	3,5	46,3
Geschlecht "m"	48,3	5,4	53,7
gesamt	91,1	8,9	100

Somit erhält man als **umgekehrtes Baumdiagramm:**



Es folgt, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{42,8}{91,1} \approx 47\%$$

ist.

(b) Alternativ berechnet man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit aus

$$P(w|j) = \frac{P(w) \cdot P(j|w)}{P(j)} \approx \frac{0,463 \cdot 0,924}{0,428 + 0,483} = \frac{0,428}{0,911} \approx 0,47.$$

zu Aufg. W56 (i) Bei einer Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2 und unbekanntem $M = E(X)$ ist ein γ -Konfidenzintervall von der Form

$$(*) \quad \left[\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{mit } c = \Phi^{-1} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right).$$

Da der Stichprobenumfang groß ist, kann man die Streuung $\sigma(X)$ durch die empirische Standardabweichung s , der Realisation der erwartungstreuen Schätzfunktion \tilde{S} der Streuung, ersetzen. Im vorliegenden Fall ist $n = 1600, \bar{x} = 0,43, s = 1$ und $\gamma = 1 - \alpha \approx 0,95$ sowie

$$c = \Phi^{-1}(1,95/2) = \Phi^{-1}(0,975) \approx 1,96, \text{ also } c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1,96}{40} = 0,049.$$

Man erhält damit als γ -Konfidenzintervall

$$[0,43 - 0,049 ; 0,43 + 0,049] = [0,381 ; 0,479].$$

(ii) Nach (*) ist die Länge des Konfidenzintervalls gleich $2 \cdot c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Es muss hier also $2 \cdot 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,09$ sein, d.h.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot 1,96}{0,09} \right)^2 \approx 43,56^2 \approx 1897,09.$$

Die Stichprobe muss also mindestens den Umfang $n = 1898$ haben.

zu Aufg. E39

ad (a): 1.Fall g_1, g_2 liegen in einer Ebene. Dann bildet u.a. wegen der Existenz einer Parallelen aus jeder Parallelenschar durch jeden Punkt und des eindeutigen Schnittes nicht-paralleler Geraden einer Ebene) jede Parallelprojektion mit einer von g_1 und g_2 verschiedenen Richtung g_1 bijektiv auf g_2 ab. Daher haben g_1 und g_2 die gleiche Mächtigkeit.

Anmerkung: Ein alternativer Beweis ist mittels Zentralprojektion möglich. Auch hier benutzt man das Euklidische Parallelenaxiom.

2.Fall: g_1 und g_2 liegen nicht in einer Ebene. Dann gibt es nicht-parallele Ebenen E_1 und E_2 , die sich in einer Geraden h schneiden (z.B. $E_i = \langle g_i, h \rangle$ mit $h = P_1 P_2$ für $P_i \in g_i$ ($i = 1, 2$)). Es folgt nach dem 1.Fall:

$$|g_1| = |h| = |g_2|.$$

ad (b): In E seien h_1 und h_2 zwei sich schneidende Geraden. Durch Parallelprojektion längs h_1 ist jedem Punkt P von E ein Punkt P_2 auf h_2 zugeordnet und durch Parallelprojektion längs h_2 ein Punkt P_1 auf h_1 . Umgekehrt hat jedes Paar $(P_1, P_2) \in h_1 \times h_2$ genau einen gemeinsamen Urbildpunkt. Daher gilt: $|E| = |h_1 \times h_2| = |h_1| \cdot |h_2|$. Nach Teil (a) ist $|h_i| = |g|$ für $i = 1, 2$.

zu Aufg. E40

Die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ASB$ und $\triangle ATB$ haben nach Konstruktion die gemeinsame Seite \overline{AB} und kongruente Seiten \overline{AS} bzw. \overline{AT} . Da die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks länger ist als die Kathete, ist jeweils der rechte Winkel Gegenwinkel der längeren der beiden relevanten Strecken. Aus dem Kongruenzsatz SsW folgt die Kongruenz der Dreiecke und damit: $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle TAB|$.

Alternative Lösung mittels Spiegelung: Die Geradenspiegelung γ an der Winkelhalbierenden w von $\sphericalangle SAT$ bildet den Schenkel AS^+ auf AT^+ und daher den Punkt S auf T ab. Erneut wegen der Winkeltreue von γ ist der auf w liegende Schnittpunkt der Schenkel der beiden rechten Winkel gleich B , und damit gilt $w = AB$.

zu Aufg. E41

(a) Translationen (fixpunktfrei oder die Identität) und zentrische Streckungen (mit mindestens einem Fixpunkt); (lediglich die Identität ist beides).

(b) Definitionsgemäß gilt für jede Gerade $g = ZP$ (mit geeignetem Punkt P) das Folgende:

$$ZP \parallel \sigma(Z)\sigma(P) = Z\sigma(P);$$

wegen des gemeinsamen Punktes Z sind die parallelen Geraden ZP und $\sigma(Z)\sigma(P)$ gleich; daher und wegen der Geradentreue gilt

$$\sigma(g) = \sigma(ZP) = \sigma(Z)\sigma(P) = ZP = g;$$

also ist g Fixgerade.

(c) Zentrische Streckungen haben definitionsgemäß mindestens einen Fixpunkt. Die Geraden durch einen Fixpunkt sind Fixgeraden der zentrischen Streckung. Sei nun σ_1 eine zentrische Streckung von \mathcal{A} mit verschiedenen Fixpunkten Z_1, Z_2 . Ein Punkt $P \in \mathcal{P} \setminus Z_1Z_2$ ist dann Schnittpunkt der (verschiedenen) Fixgeraden Z_1P und Z_2P und daher Fixpunkt.

Für die Punkte von Z_1Z_2 erhält man das gleiche Ergebnis durch Ersetzen von Z_2 durch P . Daher ist $\sigma_1 = \text{id}$.

zu Aufgabe E42

Generalvoraussetzung: \mathcal{A} 3-dim affiner Raum.

(a) Die verschiedenen Geraden g und h aus \mathcal{A} schneiden sich (in genau einem Punkt), wenn sie in einer Ebene liegen und nicht parallel sind. Dabei

bedeutet Parallelität zweier Geraden gerade, dass diese in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden.

Anmerkung: Zu g gibt es genau eine Parallelenklasse von Geraden; in dieser darf h nicht liegen, wenn ein Schnittpunkt existieren soll. Das reicht aber nicht aus: Es könnte h windschief zu g sein.

(b) Ein nicht-ausgeartetes Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem keine 3 Punkte kollinear und je zwei nicht aneinanderstoßende Seiten parallel sind.

(c) Gegeben sei das nicht-ausgeartete Dreieck ΔABC in \mathcal{A} . Nach dem Euklidischen Parallelenaxiom existiert eine zur Geraden AC parallele Gerade g von \mathcal{A} durch B und eine zu AB parallele Gerade h durch C .

Da die Parallelität von Geraden impliziert, dass diese in einer Ebene liegen, sind AC und g in einer Ebene, hier also in der durch die Punkte A, B, C aufgespannten Ebene E . Analog folgt $h \subseteq E$. Wären g und h parallel, so lägen AC und AB in der gleichen Parallelenklasse, was ausgeschlossen ist, da ΔABC nicht ausgeartet ist. Als nicht-parallele Geraden einer Ebene schneiden sich g und h in genau einem Punkt D . Das Viereck mit den parallelen Seiten AC und BD bzw. CD und AB bildet das gesuchte Parallelogramm $ABDC$.

Alternativ: Parallelogramm-Konstruktion mit der Translation $\tau_{AC}: D := \tau_{AC}(B)$.

zu Aufgabe E43

(a) Zwei Punkte R und S liegen in der gleichen Halbebene, falls sie mit g zusammen in der gleichen Ebene liegen (!) und falls $[R, S] \cap g = \emptyset$ gilt.

Anmerkung: Die letztere Bedingung allein reicht nicht, da eine Halbebene immer Teil einer Ebene ist.

(b) Sei $H = PQR^+$ Halbebene von \mathfrak{J} . Zu zeigen ist $PR^+ \subseteq H \cup PQ$.

Es ist PR enthalten in der Ebene PQR .

Evtl. durch Übergang zur entgegengesetzten Orientierung von PR können wir

$R > P$ voraussetzen.

Sei $S \in PR^+$ und $S \neq P$; wir zeigen $S \in PQR^+$, d.h. dass S in der gleichen Halbebene wie R liegt.

Definitionsgemäß ist also noch $[S, R] \cap PQ = \emptyset$ zu beweisen.

Wegen $PR^+ = PS^+$ kommt für $[S, R] \cap PQ$ nur $\{P\}$ oder \emptyset in Frage.

Nun gilt $P < S \leq R$ oder $P < R \leq S$. Für $X \in [S, R]$ folgt damit

$$P < S \leq X \leq R \text{ oder } P < R \leq X \leq S,$$

also jeweils $X > P$, daher $[S, R] \cap PQ = \emptyset$.

(Alternativ kann man auch die Zwischenrelation benutzen.)

- zu Aufgabe E44 (i) Angenommen, es gilt $AC \parallel BE$. Dann existiert $AC \cap BE =: S$, und $S \notin AB$. Läge S in der Halbebene ABC^+ , so wäre $\triangle ABS$ ein Dreieck, dessen Innenwinkel $\sphericalangle SAB$ kongruent zum nicht-anliegenden Außenwinkel $\sphericalangle SBD$ ist, ein Widerspruch. Läge S in ABC^- , so wäre $\sphericalangle EBD$ Scheitelwinkel zum Innenwinkel $\sphericalangle ABS$ des Dreiecks $\triangle ASB$ und kongruent zum nicht-anliegenden Außenwinkel $\sphericalangle CAB$, erneut ein Widerspruch. Daher ist die Annahme falsch.
- (ii) Seien $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DBE$ mit $D \in AB, E \in ABC^+$ und $EB \parallel AC$ die gegebenen Stufenwinkel. Nach dem Winkelantragungsaxiom existiert ein zu dem ersten Stufenwinkel $\sphericalangle CAB$ kongruenter Stufenwinkel $\sphericalangle FBD$ an die Schnittgerade AB in der Halbebene ABC^+ im Scheitel B des zweiten Stufenwinkels. Nach Aufgabenteil (i) sind die freien Schenkel AC^+ und BF^+ dann parallel. Wegen der Eindeutigkeit der Parallelen zu AC durch B (gemäß Euklidischem Parallelenaxiom) folgt $BE = BF$. Daher sind die gegebenen Stufenwinkel kongruent.
- (iii) Seien CE die Parallele zu AB durch C und $E \in ACB^+$. Dann ist $\sphericalangle BCE$ kongruent zum Wechselwinkel $\sphericalangle ABC$, ferner $\sphericalangle ECF$ mit $F \in AC^+$ kongruent zum Stufenwinkel $\sphericalangle BAC$. Da A und F in verschiedenen Halbebenen mit Rand CE liegen, addieren sich die (zu den nicht-anliegenden Innenwinkeln kongruenten) Winkel zum Außenwinkel $\sphericalangle BCF$.
- (iv) Nach (iii) ist der Außenwinkel $\sphericalangle BCF$ gleich der Summe der nicht-anliegenden Innenwinkel. Weil F und A in verschiedenen Halbebenen mit Rand BC liegen, kann man den anliegenden Innenwinkel hinzuaddieren und erhält den gestreckten Winkel der Größe $2R$.

- zu Aufgabe E45 (i) Nach Voraussetzung ist $h_C = s_C$. Also steht s_C senkrecht auf AB . s_C ist somit auch gleich der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$ von \overline{AB} . Als Punkt der Mittelsenkrechten von \overline{AB} hat C den gleichen Abstand von A und B ; folglich ist $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, und $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig.
- Alternativ ab 2. Zeile:* Für $F := AB \cap s_C$ sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, also $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.
- (ii) Nach dem Kongruenzsatz SSS oder der Alternative in (i) sind $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ kongruent; folglich gilt $\sphericalangle ACF \equiv \sphericalangle BCF$, und s_C ist Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.
- (iii) Sind F_A bzw. F_B die Fußpunkte von s_A und s_B , dann hat das Dreieck $\triangle AF_A C$ zwei Seiten, die kongruent zu den entsprechenden Seiten von $\triangle BF_B C$ sind und einen kongruenten Winkel einschließen. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke kongruent und damit deren Seiten s_A und s_B gleichlang.
- (iv) Da s_C gleichzeitig die Mittelsenkrechte von \overline{AB} ist und die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sich schneiden, existiert der Schnittpunkt M und hat als Punkt aller drei Mittelsenkrechten gleichen Abstand von A und B und von B und C (und von C und A).

Anmerkung: Wäre die Verwendung der Eigenschaften von Spiegelungen erlaubt worden, so hätte man als weitere Alternative z.B. in (i), (ii) und (iii)

die Spiegelung γ_{FC} betrachten können, die rechte Winkel und Längen erhält und damit A auf B abbildet (und natürlich F und C festlässt). Die Aussagen über die Längen von \overline{AC} , \overline{BC} , über die von s_A und s_B sowie die Größen der Winkel $\sphericalangle ACF$ und $\sphericalangle BCF$ folgen dann sofort.

- zu Aufgabe E46
- (i) Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADB$ sind nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent.
 - (ii) Als entsprechende Winkel kongruenter Dreiecke sind $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle CAB$ kongruent.
 - (iii) Da A und B in verschiedenen Halbebenen mit Rand CD liegen, existiert $F := AB \cap CD$. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind wegen (ii) auch die Dreiecke $\triangle DAF$ und $\triangle CAF$ und damit die Nebenwinkel $\sphericalangle AFC$ und $\sphericalangle AFD$ kongruent. Letztere sind also rechte Winkel. Die Diagonalen \overline{AB} und \overline{CD} des Drachenvierecks stehen also aufeinander senkrecht. Ferner halbiert F wegen $|\overline{CF}| = |\overline{DF}|$ die Diagonale \overline{CD} .

- zu Aufgabe E47
- (i) Als Bewegung ist die Spiegelung γ_g längentreu; ferner gilt $\gamma_g(M) = M$, da M auf der Achse g von γ_g liegt. Mit

$$\mathfrak{k} = \{P \in \mathcal{P} \mid |\overline{PM}| = r\} \quad \text{und} \quad |\overline{\gamma(P)M}| = |\overline{PM}|$$

folgt

$$\gamma_g(\mathfrak{k}) = \{\gamma_g(P) \mid |\overline{PM}| = r\} = \{\gamma_g(P) \mid |\overline{\gamma_g(P)M}| = r\} \subseteq \mathfrak{k}.$$

- (ii) Für jeden Punkt P von \mathfrak{k} gilt nach (i) auch $\gamma_g(P) \in \mathfrak{k}$ und damit $P = \gamma_g(\gamma_g(P)) \in \gamma_g(\mathfrak{k})$, insgesamt also $\mathfrak{k} = \gamma_g(\mathfrak{k})$.
- (iii) Die Achse g und der Punkt T der Achse bleiben fix unter γ_g . Da Spiegelungen winkeltreu sind, geht das Lot h auf g durch T wieder in ein solches über; dieses Lot ist aber eindeutig bestimmt; daher gilt $\gamma_g(h) = h$.
- (iv) Definitionsgemäß gilt $T \in h \cap \mathfrak{k}$. Gäbe es einen weiteren Punkt $S \in h \cap \mathfrak{k}$, so wäre auch $\gamma(S) \in h \cap \mathfrak{k}$. Da laut Hinweis $|h \cap \mathfrak{k}| \leq 2$ ist, hieße das $\gamma(S) = S$ und damit $S \in g$, also $\{S\} = g \cap h = \{T\}$, ein Widerspruch.

Alternativ: Enthielte h außer T einen weiteren Punkt S von k , so wäre $\triangle MTS$ rechtwinkliges Dreieck mit Kathete \overline{MT} und Hypotenuse \overline{MS} gleicher Länge r , ein Widerspruch.

- (v) Nach (iv) ist $h \cap \mathfrak{k} = \{T\}$. Daher ist h definitionsgemäß Tangente an \mathfrak{k} in T .

- zu Aufgabe E48
- (i) Die Gerade AC hat mit \mathfrak{k} den Punkt F gemeinsam und steht senkrecht auf MF . Laut Hinweis ist AC Tangente an \mathfrak{k} . Die Winkelhalbierende w_A ist Symmetrieachse von $\sphericalangle BAC$. Daher bildet die Spiegelung γ_{w_A} die Gerade

AC auf die Gerade AB ab und, weil w_A als Gerade durch M Symmetrieachse von ξ ist, auch ξ auf ξ . Daher ist auch AB Tangente an ξ .

(ii) Da sich die Achsen der Spiegelungen, die die drei Faktoren sind, in S schneiden, ist γ gemäß Dreispiegelungssatz ebenfalls Geraden-Spiegelung.

(iii) Da die Winkelhalbierenden Symmetrieachsen der zugehörigen Winkel bzw. das Lot ℓ_b Symmetrieachse der Geraden AC sind, folgt

$$\gamma(BC) = \gamma_{w_A} \circ \gamma_{\ell_b} \circ \gamma_{w_C}(BC) = \gamma_{w_A} \circ \gamma_{\ell_b}(AC) = \gamma_{w_A}(AC) = AB.$$

(iv) Die Achse einer Spiegelung ist Fixpunktgerade der Spiegelung; S liegt auf den Achsen der drei Faktoren von γ und ist daher Fixpunkt von γ . Ferner ist B als Schnittpunkt einer (nicht zur Achse parallelen) Geraden mit der Bildgeraden unter γ ebenfalls Fixpunkt von γ . Also ist $\gamma = \gamma_{SB}$.

(v) SB ist nach (iv) Achse der Spiegelung γ , und AB ist das Bild von BC unter γ . Also ist SB Symmetrieachse von $AB \cup BC$ und, da S im Innern des Dreiecks und damit des Winkels $\sphericalangle ABC$ liegt, somit gleich der Winkelhalbierenden w_β .

zu Aufgabe E49 (i) γ_g und γ_h sind als Spiegelungen insbesondere Bewegungen. Da die Bewegungen von \mathcal{E} eine Gruppe bilden, ist δ als Produkt von Bewegungen wieder eine Bewegung.

(ii) Z ist als Punkt der Achsen beider Faktoren von δ ein Fixpunkt dieser Bewegung.

(iii) Da Z und F Fixpunkte von γ_g sind, ist $\Delta P'ZF$ Bild des Dreiecks ΔPZF unter der Bewegung γ_g , also zu diesem kongruent.

(iv) Sei G der Fußpunkt des Lots von P' auf h . Aus (iii) ergibt sich $|\sphericalangle P'ZF| = \alpha$. Da $|\sphericalangle FZG| = 90^\circ$ und $P' \in \text{Inn}(\sphericalangle FZG)$, folgt $|\sphericalangle P'ZG| = 90^\circ - \alpha$. Durch die Spiegelung γ_h sieht man $|\sphericalangle GZP''| = 90^\circ - \alpha$. Es folgt $|\sphericalangle P'ZP''| = 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$. Damit gilt

$$|\sphericalangle PZP''| = \alpha + \alpha + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ.$$

(v) Falls $P \in g$ ist, folgt $P'' = \delta(P) = \gamma_h \circ \gamma_g(P) = \gamma_h(P) \in g$, da $h \perp g$; falls P auf h liegt, so $P'' = \delta(P) = \gamma_h \circ \gamma_g(P) \in \gamma_h(h) = h$. Deswegen und nach (iv) sind in jedem Falle P, Z und P'' kollinear. Da δ Bewegung ist, gilt ferner $|\overline{ZP}| = |\overline{ZP''}|$.

Insgesamt folgt: δ ist eine Drehung um 180° , also Punktspiegelung.

zu Aufgabe E50 (i) Nach Konstruktion haben die Dreiecke ΔABC und ΔAFE den Winkel $\sphericalangle FAB$ gemeinsam; beide haben anliegende Seitenlängen b und c . Nach dem Kongruenzsatz SWS sind sie kongruent. Daher ist auch der Winkel $\sphericalangle AEF$ ein rechter Winkel.

(ii) CC^* und EF stehen beide senkrecht auf AB ; nach dem Stufenwinkelsatz sind sie parallel.

(iii) Anwendung des 1. Strahlensatzes auf den Winkel $\sphericalangle BAF$ und die parallelen Sehnen $\overline{CC^*}$ und \overline{FE} liefert die Behauptung.

zu Aufgabe E51 Deckabbildungen bilden als Bewegungen Strecken auf Strecken gleicher Länge ab, ferner Schnittpunkte auf Schnittpunkte. Wegen $|\overline{AC}| > |\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ (–die Diagonalen sind jeweils $\sqrt{2}$ mal so lang wie eine Seite–) gilt $\sigma(A) = A$ (nach Voraussetzung) und $\sigma(\{B, D\}) = \{B, D\}$. Daher ist auch C Fixpunkt. Als Bewegung mit 2 Fixpunkten ist σ eine Geradenspiegelung und durch diese Punkte eindeutig bestimmt.

Umgekehrt ist die Geradenspiegelung mit Achse AC eine Deckabbildung von Q , da die Diagonalen von Q aufeinander senkrecht stehen und sich halbieren, also B und D spiegelsymmetrisch zur Achse AC liegen. \square

Zu Aufgabe E52 (i) Wäre $\ell_2 \parallel s_2$, so folgte aus $\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel s_2 \parallel s_1$ mittels der Symmetrie und der Transitivität der Parallelitätsrelation $\ell_1 \parallel s_1$, ein Widerspruch zu $\ell_1 \not\parallel s_1$.

(ii) Würden sich l_i und s_j (für $i, j \in \{1, 2\}$) nicht schneiden, so folgte $\ell_i \parallel s_j$; laut Voraussetzung und Teil (i) gilt aber $\ell_1 \not\parallel s_1$ und $\ell_2 \not\parallel s_2$, ferner $\ell_i \not\parallel s_j$ für $i \neq j$ wegen der Symmetrie und Transitivität der Parallelitätsrelation und $\ell_2 \parallel \ell_1 \not\parallel s_1 \parallel s_2$.

(iii) Nach der Parallelogrammregel folgt $(\tau_1 \circ \tau_2)(S_1) = S_2$.

(iv) $\tau_3 := \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ ist ebenfalls Translation. T_1 wird daher durch τ_3 auf einen Punkt der Spurgeraden t durch T_1 abgebildet; diese ist die Parallele durch T_1 zur Spur S_1S_2 .

zu Aufgabe E53 (a) Laut Voraussetzungen und Lösungshilfe haben die Seiten \overline{AD} und \overline{BC} des Rechtecks die gleiche Länge. Zusammen mit den Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} bilden sie zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DAB$, auf die u.a. wegen jeweils eines rechten Innenwinkels der Kongruenzsatz SWS angewendet werden kann.

(b) Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats $\square ABCD$. Dann gilt laut Definition des Quadrats und der Lösungshilfe: $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ und $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$. Der Kongruenzsatz SSS zeigt dann $\triangle ABM \equiv \triangle BCM$. Die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle BMC$ sind daher kongruente Nebenwinkel und damit rechte Winkel.

zu Aufgabe E54 (i) Sei α die Größe eines Innenwinkels von Δ und δ die eines der beiden anliegenden Außenwinkel. Es gilt dann $\alpha + \delta = 2R$. Eine der beiden betrachteten Dreiecksseiten liegt auch im Innern des von beiden Winkelhalbierenden gebildeten Innenwinkelfeldes. Daher können die Größen der beiden Teilwinkel zu $\zeta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}$ addiert werden. Es folgt $\zeta = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{2R}{2} = R$ und damit die Orthogonalität der beiden Winkelhalbierenden.

(ii) Stufenwinkelsatz bzw. Wechselwinkelsatz

zu Aufgabe E55 (i) U existiert laut Lösungshinweis. Als Punkt der Mittelsenkrechten m_{AB} gilt $|\overline{UA}| = |\overline{UB}| =: r'$. Analog gilt: $|\overline{UB}| = |\overline{UC}|$ und $|\overline{UC}| = |\overline{UA}|$. Es hat

also U den gleichen Abstand r' von allen drei Punkten des Dreiecks, ist daher Mittelpunkt des Kreises mit Radius r' , der durch die Ecken von $\triangle ABC$ geht und daher Umkreis dieses Dreiecks ist. Aus der Existenz und Eindeutigkeit des Umkreises von Δ folgt $U = M$ und $r = r'$.

(ii) Wären die Abstände von N zu P, Q, R gleich, so wären P, Q, R drei verschiedene Punkte einer Geraden, die auf einem Kreis um M liegen, ein Widerspruch, da eine Gerade einen Kreis in höchstens 2 Punkten schneiden kann.

(iii) Trägt man auf jeder der beiden Halbgeraden von h mit Scheitel M Strecken der Länge des Radius r ab, so erhält man zwei Schnittpunkte von h mit k . Mehr als zwei Schnittpunkte existieren laut Teil (ii) nicht.

Zu Aufgabe E56

- (a) Wegen der Transitivität der Parallelitätsrelation gilt $f_1 \parallel g$ für alle $g \in S$. Damit erhält man $|f_1 \cap g| = 1$ für alle $g \in S$.

Umgekehrt gehört nach dem Parallelenaxiom zu jedem Punkt $P \in f_1$ genau eine Gerade $g \in S$ mit $P \in g$.

Mit $|f_1| = |h_1|$ folgt die Behauptung: $|S| = |f_1| = |h_1|$.

- (b) Laut Definition von Dehnungen gilt $P\tau(P) \parallel \tau(P)\tau^2(P)$ für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$.

Gemäß der Definition der Parallelität von Geraden sind parallele nicht-disjunkte Geraden einer Ebene gleich.

Wegen $\tau(P) \in (P\tau(P) \cap \tau(P)\tau^2(P))$ folgt

$$P\tau(P) = \tau(P)\tau^2(P) = \tau(P\tau(P)) \text{ für jeden Punkt } P \in \mathcal{P}.$$

τ lässt also die Spur $P\tau(P)$ für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ fest.

Zu Aufgabe E57:

- (a) (i) Sei $\diamond ABCD$ ein Parallelogramm in der euklidischen Ebene. Dann sind die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACD$ Wechselwinkel und damit kongruent.
- (ii) Analog folgt $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CAD$ mit der gemeinsamen Seite \overline{AC} sind daher nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent, folglich auch die Seiten \overline{AB} und \overline{DC} bzw. \overline{AD} und \overline{BC} .
- (iii) (Anm.: 1. Teil von Aufg. C3) Nach Teil (ii) gilt (für die gegenüberliegenden Seiten) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle BDC$ sind Wechselwinkel und damit kongruent. Das Gleiche gilt für $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACD$. Die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CDM$ stimmen in einer Seite und allen drei Winkeln überein. Z.B. nach dem Kongruenzsatz WSW sind sie damit kongruent. Es folgt $\overline{AM} \equiv \overline{CM}$ und $\overline{BM} \equiv \overline{DM}$.

- (b) Nach (a)(i) gilt $\overline{MB} \equiv \overline{MD}$ und nach Voraussetzung (Rauten-eigenschaft) $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$. Gemäß dem Kongruenzsatz SSS sind dann die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ADM$ (mit gleicher Seite \overline{AM}) kongruent. Die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle AMD$ sind kongruente Nebenwinkel und damit rechte Winkel.

Zu Aufgabe E58 (Es handelt sich um das sogenannte 'Schmetterlingsaxiom')

- (i) Die Dreiecke $\triangle AXB$ und $\triangle AYB$ sind wegen der Voraussetzung über die kongruenten Strecken nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent.
- (ii) Daher gilt auch $\sphericalangle XAB \equiv \sphericalangle YAB$.
- (iii) Mit dem Kongruenzsatz SWS ergibt sich $\triangle AXC \equiv \triangle AYC$
- (iv) und damit $\overline{CX} \equiv \overline{CY}$.

Anmerkung: 2. Beweis-Möglichkeit:

$E := \{Z \mid \overline{ZX} \equiv \overline{ZY}\}$ ist eine Ebene (die Ebene der Mittelsenkrechten von \overline{XY}). Mit $A, B \in E$ folgt $C \in AB \subseteq E$ und daraus die Behauptung.

Zu Aufgabe E59

- (i) Die Tangenten eines Kreises stehen senkrecht auf den Radien.
(Anmerkung: Daher lassen sich B_1 und B_2 mittels Thaleskreis finden.)
- (ii) Die Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz SsW kongruent, da sie einen rechten Winkel enthalten (s.(i)), eine gemeinsame Seite (als Kathete kürzer als die Hypotenuse) und zwei kongruente Seiten (die Radien) besitzen.
- (iii) Da wegen dieser Kongruenz auch die Winkel $\sphericalangle MPB_1$ und $\sphericalangle MPB_2$ kongruent sind, ist PM die Winkelhalbierende im Dreieck $\triangle PB_1B_2$ und wegen der Gleichschenkligkeit ebenfalls Höhe, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte.

Zu Aufgabe E60 (Vgl. Aufgabe E9 - eine Richtung)

- (i) SSS
Anmerkung: Es gilt laut Voraussetzung $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ und nach Lösungshilfe auch im allgemeinen Parallelogramm $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. Der Kongruenzsatz SSS liefert daher $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.
- (ii) Die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ haben wegen der Kongruenz der Dreiecke die gleiche Größe.
- (iii) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle (BC^+, BA^-)$ folgt aus dem Satz über die Kongruenz von Stufenwinkeln mit parallelen freien Schenkeln.

- (iv) Die beiden Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ sind (kongruente) Nebenwinkel voneinander; daraus folgt, dass $\sphericalangle ABC$ rechter Winkel ist.
- (v) Aus Symmetriegründen folgt, dass auch die anderen Innenwinkel rechte sind. Daher ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Anmerkung: Alternativ zu einigen der obigen Argumente lassen sich auch Betrachtung von geeigneten Winkelsummen anstellen.

Zu Aufgabe 61

- (a) (i) Seien S und T die Fußpunkte der Lote von R auf OA^+ bzw. OB^+ . In den Dreiecken $\triangle OSR$ und $\triangle OTR$ sind die beiden Winkel bei O kongruent, da w_α die Winkelhalbierende von $\alpha = \sphericalangle AOB$ ist; die beiden Winkel bei S und T sind rechte Winkel (da \overline{SR} und \overline{RT} die Lote auf die Schenkel sind). Laut Hinweis haben dann auch die dritten Winkel der beiden Dreiecke die gleiche Größe. Damit stimmen die beiden betrachteten Dreiecke in der Größe aller Innenwinkel überein.
(ii) Da die betrachteten Dreiecke auch in der Größe der gemeinsamen Seite \overline{OR} übereinstimmen, sind sie z.B. nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent. Es folgt $\overline{RS} \equiv \overline{RT}$.
- (b) Wegen $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, $\overline{MA} \equiv \overline{MB}$ und der gemeinsamen Seite \overline{OM} sind die Dreiecke $\triangle OAM$ und $\triangle OBM$ nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Daraus ergibt sich sofort, dass $\sphericalangle AOM$ und $\sphericalangle BOM$ kongruent sind, woraus $w_\alpha = OM^+$ folgt.

Alternativ folgt wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle AOB$, dass $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OBM$. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind dann mit $M' := w_\alpha \cap AB$ die Dreiecke $\triangle OAM'$ und $\triangle OBM'$ kongruent, woraus sich $M = M'$ ergibt.

Anmerkung: Aus dem eben Bewiesenen folgt auch die Existenz von w_α .

Zu Aufgabe 62

- (i) Da A, B, C als verschiedene Punkte von k nicht kollinear sein können, ist $\triangle ABC$ nicht ausgeartet. M ist daher der Schnittpunkt von zwei (und damit aller) Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$ und hat von allen drei Ecken A, B, C den gleichen Abstand. M ist somit der Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks und wegen dessen Eindeutigkeit der Mittelpunkt von k .
Alternativ: Wegen $A, B, C \in k$ gilt $r = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$; aus Eigenschaften der Mittelsenkrechten folgt daraus $M \in m_{AB}$ sowie $M \in m_{BC}$. Die beiden Mittelsenkrechten können nicht parallel sein, da ansonsten A, B, C kollinear wären. Also folgt $M = m_{AB} \cap m_{BC}$.
- (ii) Gäbe es einen Punkt $R \in g \cap k$ mit $R \neq P$, so wäre $\triangle MPR$ ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Länge der Hypotenuse gleich der Länge einer Kathete wäre, ein Widerspruch. Also ist $|k \cap g| = 1$,

E-mail-Adresse des Autors:
rhschulz@zedat.fu-berlin.de

24. Februar 2021