§ 8 Dimension und Isomorphie von Vektorräumen

M
↓

Bei den Vektorräumen der Beispiele (1.1)und (1.2) ist es anschaulich klar, dass jede Basis die gleiche Elementeanzahl enthält: Je zwei linear unabhängige Vektoren spannen die Ebene, je drei den Raum auf.

Wir fragen nach einer Verallgemeinerung: Sind bei einem gegebenen Vektorraum alle Basen von der gleichen Mächtigkeit?

↑
M

Bei dieser Untersuchung beschränken wir uns zunächst auf **endlich erzeugbare** Vektorräume, d.h. solche, die ein endliches Erzeugendensystem und nach (7.7) damit eine endliche Basis besitzen.

8.1 Hilfssatz.

Seien $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des K-Vektorraumes V und $a = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \lambda_i$ mit $\lambda_i \in K$ und $\lambda_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist auch

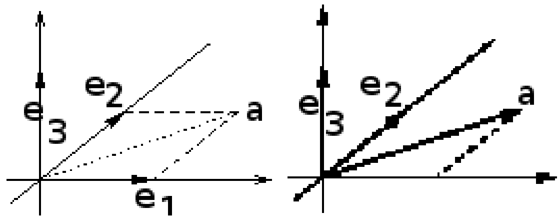
$$B' = \{b_1, \dots, b_{j-1}, a, b_{j+1}, \dots, b_n\}$$

eine Basis von V; außerdem gilt $a \notin \{b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n\}$.

Beispiel.

Seien $V = \mathbb{R}^3$,
$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$,
$B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $a = (1,1,0)$.

Wegen
$a = (1,0,0) \cdot \underline{1} + (0,1,0) \cdot \underline{1} + (0,0,1) \cdot 0$
sind auch $B' = \{a, e_2, e_3\}$ und
$B'' = \{e_1, a, e_3\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$; (s. auch Figur 8.1 !)



Figur 8.1: Austausch eines Basisvektors (Ersetzen von $\vec{e_1}$ durch $\vec{a}$).

Beweis von 8.1. Zunächst gilt:

(i) $a = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \lambda_i + b_j \lambda_j \underset{\lambda_j \neq 0}{\Rightarrow} b_j = \big(a - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \lambda_i\big) \lambda_j^{-1}$.

Sei $v \in V$; wegen $V = \langle B \rangle$ existieren $\mu_1, \dots, \mu_n \in K : v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \mu_i$; damit folgt

$$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \mu_i + b_j \mu_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \mu_i + \big(a - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \lambda_i\big) \lambda_j^{-1} \mu_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i (\mu_i - \lambda_i \lambda_j^{-1} \mu_j) + a(\lambda_j^{-1} \mu_j).$$

Also ist $V = \langle B' \rangle$.

(ii) Wir zeigen: $a, b_1, \dots b_{j-1}, b_{j+1}, \dots b_n$ und damit B' sind linear unabhängig.

$$\begin{aligned}
a\mu + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} b_i\mu_i = \mathfrak{o} &\Rightarrow \Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} b_i\lambda_i + b_j\lambda_j\Big)\mu + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} b_i\mu_i = \mathfrak{o}\\
&\Rightarrow \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} b_i(\lambda_i\mu + \mu_i) + b_j(\lambda_j\mu) = \mathfrak{o}\\
&\underset{B \text{ l.u.}}{\Rightarrow} (\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} : \lambda_i\mu + \mu_i = 0) \wedge \lambda_j\mu = 0\\
&\underset{\lambda_j\neq 0}{\Rightarrow} \mu = 0 \wedge \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} : \mu_i = 0.
\end{aligned}$$

(iii) In (ii) wurde gezeigt, dass $a, b_1, \dots b_{j-1}, b_{j+1}, \dots b_n$ linear unabhängig sind; daher gilt $a \neq b_k$ für alle $k \neq j$. □

Verallgemeinerung:

8.2 Satz. (Austausch-Satz/Lema von Steinitz)

Seien $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis des (endlich erzeugbaren) K-Vektorraumes V und $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V (mit $|B| = n$ und $|A| = m$).
Dann gilt: (1) $m = |A| \leq |B| = n$.

(2) $\exists C \subseteq B : \quad B' = C \cup A$ ist Basis von V und $|B'| = n$.

Beweis. Durch vollständige Induktion nach m:
Induktions–Verankerung: $m = 1$. Gegeben sei: $\{a_1\}$.
B Basis $\Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i$ für geeignete $\lambda_i \in K \underset{\{a_1\} \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \exists j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j \neq 0$;
mit (8.1) folgt $B' = \{b_1, \dots, b_{j-1}, a_1, b_{j+1}, \dots, b_n\}$ ist Basis der Mächtigkeit n und damit $m = 1 \leq n$.
Induktions–Voraussetzung: Die Behauptung sei richtig für $m = k-1$, d.h.:
$\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ linear unabhängig $\Rightarrow k-1 \leq n$ und $\{a_1, \dots, a_{k-1}\} \cup \{b_{i_k}, \dots, b_{i_n}\}$ ist Basis der Mächtigkeit n für eine geeignete Teilmenge $\{b_{i_k}, \dots, b_{i_n}\} \subseteq B$.
Induktions–Schluss:
$\{a_1, \dots, a_k\}$ l.u. $\Rightarrow \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ l.u. $\underset{\substack{\text{Ind.}\\\text{Vor.}}}{\Rightarrow} k-1 \leq n$ und $B'' = \{a_1, \dots, a_{k-1}, b_{i_k}, \dots, b_{i_n}\}$ Basis für eine geeignete Teilmenge $\{b_{i_k}, \dots, b_{i_n}\}$ von B.
Wäre $k-1 = n$, so $B'' = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$, damit $a_k \in \langle a_1, \dots, a_{k-1}\rangle$ und A linear abhängig, ein Widerspruch. Also ist $k-1 < n$, d.h. $k \leq n$.
Da $a_k \in V = \langle B'' \rangle$ ist, existieren $\lambda_k, \dots, \lambda_n \in K$ mit $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\lambda_i + \sum_{j=k}^{n} b_{i_j}\lambda_j$; wären $\lambda_k, \dots, \lambda_n$ sämtlich 0, so A linear abhängig; somit existiert ein $\lambda_0 \in \{\lambda_k, \dots, \lambda_n\}$ mit $\lambda_0 \neq 0$. Nach (8.1) gilt: $(B'' \setminus \{b_{i_0}\}) \cup \{a_k\}$ ist Basis von V der Mächtigkeit n. □

8.3 Korollar: Elementeanzahl in Basen

Je zwei Basen eines endlich erzeugbaren K-Vektorraumes V enthalten dieselbe (endliche) Anzahl von Elementen.

Beweis. Sei B Basis mit $|B| = n \in \mathbb{N}_0$ (eine solche existiert nach Voraussetzung, da V endlich erzeugbar ist); sei B' eine weitere Basis von V. (B' könnte unendlich sein.)
Ist M endliche Teilmenge von B', so ist M linear unabhängig; nach (8.2) gilt $|M| \leq n$ und damit $|B'| \leq n = |B|$. Analog folgt $|B| \leq |B'| < \infty$, also $|B| = |B'|$. $\square$

Die Beschränkung auf endlich erzeugbare Vektorräume in (8.3) ist unnötig, falls man das Auswahlaxiom oder äquivalente Bedingungen heranzieht[41]; es gilt dann folgende Verallgemeinerung:

8.4 Satz von Löwig (Basis-Gleichmächtigkeits-Satz).

Je zwei Basen eines K-Vektorraumes V sind gleichmächtig.

Beweis-Andeutung.
Seien B_1 und B_2 Basen von V. Ist B_1 oder B_2 endlich, so folgt $|B_1| = |B_2|$ nach (8.3). Seien also B_1, B_2 unendlich.
Ist $x \in B_1$, so bezeichne $B_{2,x}$ die Menge der Basisvektoren aus B_2, die zur Darstellung von x „benötigt" wird; diese Menge ist endlich. Außerdem gilt $B_2 = \bigcup\limits_{x \in B_1} B_{2,x}$, anderenfalls wären Elemente von B_2 überflüssig.
Daher gilt $|B_2| = |\bigcup\limits_{x \in B_1} B_{2,x}| \underset{\substack{\text{wegen} \\ |B_{2,x}| \leq \aleph_0}}{\leq} |B_1| \cdot \aleph_0 \underset{\substack{\text{wegen} \\ B_1 \text{unendlich}}}{=} |B_1|$.
(Zur Kardinalzahl-Arithmetik s. z.B. Dugundji, Topology, Chap.II, Boston 1966 oder Scheja/Storch - s. Literaturliste - oder Bücher über Mengenlehre.)
Analog folgt $|B_1| \leq |B_2|$. Insgesamt ergibt sich $|B_1| = |B_2|$. $\square$

(Einen hiervon etwas abweichenden Beweis findet man z.B. in H. Lüneburg: Einführung in die Algebra etc. 1973 p. 169).

Wie wir später sehen werden, ist die (konstante) Mächtigkeit einer Basis von V eine der wesentlichen charakteristischen Eigenschaften von V.

8.5 Definition: Dimension eines Vektorraums

Sei V ein K-Vektorraum. Die Mächtigkeit m einer (und nach (8.4) damit jeder) Basis von V heißt die

Dimension des Vektorraumes V über dem Körper K,

oft auch **Rang** von V über K.
Schreibweise: $\dim_K V = m$
Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir auch $\dim V = m$.

[41] Zur Definition der Kardinalzahlen wird die Wohlordnung der sogenannten Ordinalzahlen verwandt.

Anmerkung 1. Ein endlich erzeugter Vektorraum besitzt definitionsgemäß eine endliche Basis. Ist deren Elementeanzahl n ($\in \mathbb{N}_0$), so gilt $\dim V = n$. Wir nennen V dann auch einen n-dimensionalen Vektorraum. Statt von einem endlich erzeugten Vektorraum werden wir im folgenden von einem **endlich-dimensionalen** Vektorraum sprechen.

Beispiel.

(i) $V = \mathcal{V}$, der Vektorraum der Vektoren der reellen Ebene: $\mathcal{V} = \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$. Also:

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ (in Übereinstimmung mit der umgangssprachlichen Dimensionsvorstellung).

Dimension von Unterräumen:

$$\begin{array}{ll} \dim_{\mathbb{R}}(\vec{a}\,\mathbb{R}) = 1, & \text{für } \vec{a} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}, \\ \dim_{\mathbb{R}}(\{\mathfrak{o}\}) = 0, & (\text{da } \emptyset \text{ Basis von } \{\mathfrak{o}\} \text{ ist}). \end{array}$$

(ii) $V = \mathcal{V}_{\mathrm{r}}$, der Vektorraum der Vektoren des reellen Raumes: $\mathcal{V}_r = \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle$. Es folgt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_{\mathrm{r}} = 3$.

Dimension von Unterräumen:

$$\begin{array}{lll} \dim_{\mathbb{R}}(\vec{a}\mathbb{R} + \vec{b}\mathbb{R}) & = 2, & \text{falls } \vec{a}, \vec{b} \text{ linear unabhängig sind}, \\ \dim_{\mathbb{R}} \vec{a}\mathbb{R} & = 1, & \text{falls } \vec{a} \neq \mathfrak{o}, \\ \dim_{\mathbb{R}}(\{\mathfrak{o}\}) & = 0. & \end{array}$$

(iii) Für $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\boxed{\dim_K K^n = n} \quad (\text{da } \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ Basis ist}).$$

Anmerkung 2. Besitzt der K-Vektorraum V keine endliche Basis, so nennt man ihn auch oft unendlich-dimensional, in Zeichen $\dim_K V = \infty$.
Hierbei ist die (unendliche) Mächtigkeit nicht angegeben, es handelt sich also um eine globalere Angabe als in Definition (8.5).

Beispiel.
$\{{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, dem Vektorraum der reellen Polynomabbildungen. Daher gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$, genauer: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \aleph_0$.

Anmerkung 3. Obwohl $\emptyset$ kein Vektorraum (insbesondere auch kein Unterraum) ist, erweist es sich (für später behandelte Formeln) als zweckmäßig,

$$\dim_K \emptyset := -1$$

zu definieren.

Weitere Folgerungen:

8.6 Hilfssatz: Anzahl linear unabhängiger Vektoren

> Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq V$. Dann gilt
>
> (i) A linear unabhängig $\Rightarrow |A| \leq n$.
>
> (ii) A Basis $\Leftrightarrow$ A linear unabhängig und $|A| = n$.
>
> (iii) U Unterraum von $V \Rightarrow \dim_K U \leq n$.

Beweis.

(i) Nach (7.7) existiert eine Basis B mit $A \subseteq B$. Nach (8.3) ist $|B| = n$.

(ii) Ist A Basis, so nach (8.3) $|A| = \dim_K V = n$ und definitionsgemäß A linear unabhängig.

Ist A linear unabhängig und $|A| = n$, so folgt wie in (i) $A \subseteq B$ für eine Basis B und aus Anzahlgründen $A = B$.

(iii) Ist C Basis von U, so gilt: C linear unabhängig in U und damit C linear unabhängig in V. Aus (i) folgt
$$\dim_K U = |C| \leq n = \dim_K V.$$ □

Wir wollen im folgenden untersuchen, inwieweit die Struktur eines Vektorraumes schon durch seine Dimension festgelegt ist. Zunächst beachten wir folgende
Anmerkung: Ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper K und K' ein Unterkörper von K, so ist $\left(V, +, \underset{K}{\cdot}\Big|_{V \times K' \to V}\right)$ ein K'-Vektorraum.
Beispiele.
Jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum wird durch Einschränkung des Skalarbereichs von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Q}$ zum $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum wird bei Beschränkung auf reelle Skalare zum $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Da bei der Einschränkung des Skalarbereichs eine linear abhängige Menge linear unabhängig werden kann (in den Linearkombinationen dürfen einige Koeffizienten nicht mehr verwandt werden), gilt i.A.
$$\dim_K V \neq \dim_{K'} V.$$

Beispiele.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1,$	$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$	genauer: $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathfrak{c} = \lvert\mathbb{R}\rvert$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1,$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$	($1, i$ sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$, aber linear abhängig über $\mathbb{C}$).

Da sich mit Wechsel des Körpers auch weitere Eigenschaften (z.B. Dimension von Unterräumen) der entsprechenden Vektorräume ändern, scheint es zweckmäßig, sich bei Betrachtungen über Struktur-Gleichheit auf Vektorräume über dem selben Körper zu beschränken, insbesondere also K und die Dimension festzuhalten.

8.7 Definition: Vektorraum-Isomorphismus

Seien V und V' Vektorräume über dem selben Körper K.
(a) (Vorgriff auf 10.1:) Eine Abbildung $f : V \to V'$ heißt **lineare Abbildung** (VR-Homomorphismus, Operator, lineare Transformation), falls gilt:

$$(1)\ \ \forall v, w \in V : f(v+w) = f(v) + f(w);$$

$$(2)\ \ \forall v \in V : \forall \lambda \in K : f(v\lambda) = f(v) \cdot \lambda.$$

(b) V und V' heißen **isomorph** (in Zeichen $V \cong V'$), wenn es eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to V'$ gibt. Eine solche Bijektion dieser Eigenschaft heißt **Vektorraum-Isomorphismus** (VR-Iso)

Anmerkung. Ein Vektorraum-Homomorphismus $f : V \to V'$ ist wegen (1) insbesondere Gruppenhomomorphismus von $(V, +)$ in $(V', +)$. Zusätzlich beachtet er die beiden Multiplikationen mit Skalaren. Analog ist ein VR-Isomorphismus auch ein Gruppenisomorphismus.

Isomorphe Vektorräume sind von der Vektorraum-Struktur her nicht unterscheidbar.

Beispiele: (i) Sei $\mathcal{V}$ der in (1.1) behandelte Vektorraum der Klassen vektorgleicher Pfeile. Dann gilt

$$\mathcal{V} \cong \mathbb{R}^2.$$

Wählen wir die Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ von $\mathcal{V}$, so lässt sich diese Isomorphie als Übergang von den Vektoren zu den durch die entsprechenden Ortsvektoren bestimmten Punkten (in kartesischen Koordinaten) geometrisch deuten: $\vec{v} = \vec{e}_1\xi_1 + \vec{e}_2\xi_2 \mapsto (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$
Aufgrund der Isomorphie können wir von dem zum Teil intuitiv eingeführten $\mathcal{V}$ zu dem Modell $\mathbb{R}^2$ übergehen (siehe auch § 9 !)

(ii) Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Dann existiert definitionsgemäß eine Basis B, die wir als geordnet annehmen können.
Die Abbildung

$$i_B : \begin{cases} \qquad V & \to K^n \\ \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B & \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{cases}$$

ist dann ein Vektorraum-Isomorphismus (vgl. (7.6)); es folgt nämlich

$$i_B(x+y) = i_B(x) + i_B(y) \quad \text{und} \quad i_B(x\lambda) = i_B(x)\lambda\ .$$

Es gilt also $V \cong K^n$.
Oft werden wir (nach Auswahl einer Basis B) die Elemente von V mit den Elementen von K^n identifizieren.
(iii) Sei $V = V' = \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(v) = v\lambda$ ein Vektorraum-Isomorphismus von V auf sich, ein Vektorraum-Automorphismus. Die Inverse ist ebenfalls ein Automorphismus: $f^{-1}(w) = w\lambda^{-1}$.
Beweis?
Wir betrachten Eigenschaften der Isomorphie. Ähnlich wie bei der Gruppenisomorphie gilt:

8.8 Hilfssatz: Eigenschaften von VR-Isomorphismen

(a) Auf jeder Menge von Vektorräumen ist die Vektorraum-Isomorphie eine Äquivalenzrelation.
(b) Ist $f : V \to V'$ ein Vektorraum-Isomorphismus, so auch $f^{-1} : V' \to V$.
(c) Die Hintereinanderausführung von zwei VR-Isomorphismen ist wieder ein VR-Isomorphismus.

Beweis.

(i) $V \cong V$: id_V ist ein Isomorphismus.

(ii) $V \cong V' \Leftrightarrow V' \cong V$.

Ist $f : V \to V'$ Isomorphismus, so existiert f^{-1}; wir zeigen, dass f^{-1} wieder Vektorraum-Isomorphismus ist: die Additivität von f^{-1} sieht man folgendermaßen: Für alle $v', w' \in V'$ existieren $v, w \in V$ mit $f(v) = v'$ und $f(w) = w'$, also gilt:
$f^{-1}(v'+w') = f^{-1}\big(f(v)+f(w)\big) \underset{f \text{ Isom.}}{=} f^{-1}\big(f(v+w)\big) = v+w = f^{-1}(v')+f^{-1}(w')$;
die Verträglichkeit mit der S-Multiplikation ergibt sich so:

$\forall v' \in V' \, \exists v \in V : f(v) = v'$, damit gilt für alle $\lambda \in K$:

$f^{-1}(v'\lambda) = f^{-1}\big(f(v)\lambda\big) \underset{f \text{ Isom.}}{=} f^{-1}\big(f(v\lambda)\big) = (f^{-1} \circ f)(v\lambda) = v\lambda = f^{-1}(v')\lambda.$

(iii) $V \cong V' \wedge V' \cong V'' \Rightarrow V \cong V''$.

Seien $f : V \to V'$ und $g : V' \to V''$ Isomorphismen; dann ist $g \circ f$ definiert, Gruppen-Isomorphismus und wegen

$$(g \circ f)(v\lambda) = g\big(f(v\lambda)\big) = g\big(f(v)\lambda\big) = g\big(f(v)\big)\lambda = (g \circ f)(v)\,\lambda$$

Vektorraum-Isomorphismus.

(b) und (c) folgen aus dem obigen Beweis. □

Aus obigem Beispiel (ii) ergibt sich die eine Implikation von

8.9 Satz: Vektorräume der dim n

Sei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\dim_K V = n \Leftrightarrow V \cong K^n.$$

Bis auf Isomorphie gibt es nur einen $K-$Vektorraum der Dimension n.

Beweis. "$\Rightarrow$" s.o.(Beispiel)
"$\Leftarrow$" $B = (e_1, \ldots, e_n)$ ist (geordnete) Basis von K^n; damit $\boxed{\dim_K K^n = n}$, (s.o.). Laut Voraussetzung existiert ein Isomorphismus $f : K^n \to V$. Wir zeigen, dass $f(B) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ Basis von V ist:

(i) $V = \langle f(B) \rangle$:

Sei $v \in V$; da f Bijektion ist, gilt: $\exists w = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : f(w) = v$.

$$v = f(w) = f\big((\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i\Big) \underset{f \text{Isom.}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\lambda_i \in \langle f(B) \rangle.$$

(ii) $f(B)$ linear unabhängig:

$$\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\mu_i = \mathfrak{o} \underset{f \text{Isom.}}{\Rightarrow} f\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i \mu_i\Big) = \mathfrak{o} \underset{\substack{\text{inj.Hom.} \\ \text{von}(K^n,+) \\ \text{auf } (V,+)}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} e_i \mu_i = \mathfrak{o} \underset{B \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \forall i = 1, \dots, n : \mu_i = 0.$$

□

Damit ist es uns gelungen, alle endlich erzeugten Vektorräume zu beschreiben; es sind dies (bis auf Isomorphie) gerade die Vektorräume $(K^n, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Ohne Beweis erwähnen wir eine Verallgemeinerung.

8.10 Satz (Isomorphie und Gleichmächtigkeit der Basen)

Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Dann sind V und W genau dann isomorph, wenn V und W gleichmächtige Basen besitzen.

Zwei Vektorräume über demselben Körper K sind also genau, dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension besitzen. **Achtung**: Hierbei ist aber die präzise Definition (8.5) und nicht die aus Anmerkung 2 zu (8.5) zu verwenden:

$$\dim V = \infty \wedge \dim W = \infty \underset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow} V \cong W.$$

Insbesondere lässt sich zeigen:

8.11 Satz : Isomorphie zu $\boldsymbol{K^{(I)}}$

Sei V ein K-Vektorraum und B Basis von V. Dann gilt

$$V \cong K^{(I)} \Leftrightarrow |I| = |B| \; (= \dim_K V).$$

Anmerkung :

Die $K^{(I)}$ (für Indexmengen I) sind also bis auf Isomorphie sämtliche $K-$Vektorräume.