2 Zur normierten Sprache der Mathematiker

Hinweis: Inhalte dieses Paragraphen werden zum Teil in der parallelen Vorlesung 'Elementare Algera/ Zahlentheorie I' behandelt und daher hier übersprungen.

Literatur:
Deiser, Oliver: Einführung in die Mengenlehre. 19.9.2018
http://www.aleph1.info/?call=Puc& permalink=mengenlehre1

Deiser, Oliver: Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo. Springer. Berlin 2002.

Loomis-Sternberg: Advanced Calculus (Einleitung). https://archive.org/details/LoomisL.H.SternbergS.AdvancedCalculusRevisedEditionJonesAndBartlett

Gebraucht erhaltbar:
Halmos, P.R.: Naive Mengenlehre, Göttingen 1968.
Felscher, W.: Naive Mengen und abstrakte Zahlen I, Zürich 1978.
Warlich,L.: Grundlagen der Mathematik für Studium und Lehramt I. 1996/ 2006.

2.1 Naive Logik

(a) Aussagen und Aussageformen
Mathematische **Aussagen** sind sprachliche Gebilde, denen entweder der Wert „wahr" (w) oder der Wert „falsch" (f) zu, geordnet werden kann. Eine andere Möglichkeit soll es für eine Aussage nicht geben („tertium non datur", Zweiwertigkeitsprinzip).

Beispiel.

4 ist eine gerade Zahl	(w)
$4 + 3 = 6$	(f)
$4 + x = 6$	keine Aussage

Sprachliche Gebilde mit „Variablen" („freien Variablen ", s.u.), die nach Ersetzen dieser Variablen in Aussagen (egal, ob wahr oder falsch) übergehen, heißen **Aussageformen** (Prädikate oder Formeln der Aussagenlogik).

Beispiel.
$4 + x = 6$ und x ist natürliche Zahl (Gleichung !)
$x \neq x$
$x < y$
sind Aussageformen.

Meist wird auch die Menge der Elemente, die man für die Variablen einsetzen will und kann, der Grundbereich M der Aussageform, angegeben. Ist $A(x)$ eine Aussageform in der nur die Variable x vorkommt (z.B. $A(x) : 4 + x = 6$ mit Grundbereich $\mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen), so erhalten wir also durch Ersetzen von x durch ein Element des Grundbereichs (z.B. durch 5) eine Aussage (z.B. $A(5) : 4 + 5 = 6$), die dann wieder einen Wahrheitswert besitzt (hier: falsch). (Ist $A(x)$ Gleichung, so heißt x_1 aus M **Lösung**, falls $A(x_1)$ wahr ist).
Da Aussageformen durch jede Ersetzung in Aussagen übergehen, kann man mit ihnen meist hantieren wie mit Aussagen (s.u. Teil (c)).

(b) Quantoren

Die oben beschriebene Einsetzung von Elementen in eine Aussageform ist nur eine Möglichkeit, von einer Aussageform zu einer Aussage zu gelangen. Eine weitere ist es, die „Erfüllbarkeit“ einer Aussageform zu betrachten:
„Es existiert (mindestens) ein x aus M mit der Eigenschaft, dass $A(x)$ wahr ist.“
Dies ist dann wieder eine Aussage mit Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“, eine sogenannte **Existenzaussage**.

Sprech- und Schreibweise: Es existiert ein x aus M mit $A(x)$;
ex. $x \in M : A(x)$;
$\boxed{\exists x \in M : A(x)}$,
$\bigvee_{x \in M} A(x)$.

Beispiele:

(i) Es existiert eine natürliche Zahl x mit $4 + x = 6$, kurz
$\exists x \in \mathbb{N} : 4 + x = 6$ (Wahrheitswert w)

(ii) $\exists x \in \mathbb{N} : x \neq x$ (Wahrheitswert f)

Anmerkungen.

1.) In „$\exists x : A(x)$“ kommt zwar noch eine Variable x formal vor, jedoch ist es nicht mehr erlaubt, ein Element des Grundbereichs einzusetzen. Wir sprechen von einer **gebundenen Variablen**

2.) Die Sprechweise „es existiert ein“ bedeutet stets „es existiert **mindestens** ein“; existiert **ein** $x \in M$ mit $A(x)$, aber **keine zwei** verschiedene in M, so sagen wir: „es existiert **genau ein** $x \in M$ mit $A(x)$“, kurz $\exists_1 x \in M : A(x)$ bzw. $\exists!\, x \in M$ oder $\dot{\bigvee}_{x \in M} : A(x)$.

Eine weitere Aussage mit gebundener Variablen ist die Allgemeingültigkeitsaussage für einen Bereich M (All-Aussage): „Für alle x aus M gilt: $A(x)$ ist wahr“.

Sprech- und Schreibweisen: Für alle x aus M gilt $A(x)$;
f.a. $x \in M : A(x)$;
$A(x)$ f.a. $x \in M$;
$\boxed{\forall x \in M : A(x)}$
$\bigwedge\limits_{x \in M} A(x)$.

Beispiele.

$\forall x \in \mathbb{N} : 4 + x = 6$ (Wahrheitswert f)
$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$ (Wahrheitswert w)
$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ (Wahrheitswert f)

Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen.
An dem Beispiel zeigt sich die Wichtigkeit des Grundbereichs M für den Wahrheitswert einer All-Aussage.
Enthält eine Aussageform $A(x, y, ...)$ mehrere freie Variable, so können diese durch entsprechend viele Quantoren gebunden werden; dabei ist jeder Quantor auf die hinter ihm stehende Aussage bezogen; gegebenenfalls verdeutlicht man den Wirkungsbereich durch Klammern.

Beispiel. $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x + y = y + x$ (w) .

Außer bei gleichen Quantoren ist unbedingt **auf die Reihenfolge zu achten**:

$$\begin{array}{llll} & \forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y & \text{(w)} & \text{(z.B. } y = x + 1) \\ \text{aber} & \exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x < y & \text{(f)} & \text{(z.B. } x = y + 1 > y \text{ f.a. } y \in \mathbb{N}). \end{array}$$

Jedoch darf man zwei hintereinander stehende Allquantoren vertauschen, also von

$$\forall x \in M_1 : \forall y \in M_2 : A(x, y) \qquad \text{zu} \qquad \forall y \in M_2 : \forall x \in M_2 : A(x, y)$$

übergehen. Entsprechendes gilt für zwei hintereinander stehende Existenzquantoren.

(c) Junktoren

1. Negation einer Aussage $\boxed{\neg A}$, non A.

Beispiele. (i) A: $4 + 3 = 7$ (w)

$\neg A$: $4 + 3 \neq 7$ (f)[7]

(ii) A: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ (f)

$\neg A$: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$ (w).

Der Zusammenhang zwischen Wahrheitswert einer Aussage und dem ihrer Negation lässt sich in einer Tabelle (**Wahrheitstafel**) darstellen:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Umgekehrt präzisiert diese Wahrheitstafel den Begriff „Negation", zumindest was sein Verhalten bzgl. des Wahrheitswertes angeht.

2. Das logische „und" $\boxed{A \wedge B}$, A und B

Auch diese logische Verknüpfung beschreiben wir ganz formal durch eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ ist also nur wahr, wenn **sowohl** A **als auch** B wahr sind.

Beispiele. $(4 + 3 = 7) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$ (w) ,

$(4 + 3 = 6) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$ (f) .

Auch die Bildung der Aussageform $A(x, y, \dots) \wedge B(x, y, \dots)$ ist sinnvoll (Beispiel: Gleichungssysteme).

[7] Hierbei ist $a \neq b$ eine Abkürzung für $\neg(a = b)$.

3. Das logische „oder“ $\boxed{\boldsymbol{A \vee B}}$, ***A* oder *B***

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \vee B$ ist also nur wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist. (Dieses „oder “ entspricht dem lateinischen vel, dessen Anfangsbuchstabe zum Zeichen $\vee$ führte.)

Beispiele.
$(4+3=7) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$ (w) ,
$(4+3=6) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$ (w) .

4. Wenn – dann $\boxed{\boldsymbol{A \Rightarrow B}}$ (Subjunktion)

Sprechweisen: „Wenn A, dann B“.
„A ist hinreichend für B“.
„B ist notwendig für A“.
„Aus A folgt B“; (wobei hier „folgt“ nicht inhaltlich, sondern **rein formal** gemeint ist).

Der Wahrheitswert der Aussage $A \Rightarrow B$ für Aussagen A und B wird definiert durch

A	B	$A \Rightarrow B$	
w	w	w	aus Wahrem folgt nur Wahres.
w	f	f	
f	w	w	„Ex falso quodlibet“.
f	f	w	

Wir verwenden das Zeichen „$\Rightarrow$“ auch zwischen Aussageformen

$$A(x,y,\dots) \Rightarrow B(x,y,\dots) \quad (\textbf{Implikation}).$$

Wenn für jede Einsetzung aus dem Grundbereich $A(x,y,\dots) \Rightarrow B(x,y,\dots)$ wahr ist, spricht man von einer **Folgerung**. Aber auch für umgangs- oder metasprachliche Herleitungen benutzt man das Zeichen „$\Rightarrow$“ und spricht ebenfalls von einer Folgerung. (In der mathematischen Praxis unterscheidet man meist nicht zwischen „Subjunktion“, „Implikation“ und „Folgerung“.)

Bei der oben-stehenden Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$ sind die beiden letzten Zeilen beachtenswert. Besagen sie doch, dass ein Schluss formal richtig ist, wenn er von einer falschen Aussage ausgeht (Bsp. $9=5 \Rightarrow 14=14$ (w)). Jedoch ist diese Vereinbarung nicht abwegig. So wird z.B. der umgangssprachliche Satz (Aussageform mitZeitvariable) M $\downarrow$

„Wenn es regnet, werden die Straßen nass. “

als gültig anerkannt, unabhängig davon, ob es gerade regnet oder ob die Straßen gerade nass sind. Auch ist es sinnvoll, die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} : (3x+1=4 \Rightarrow x^2=1)$$

als wahr anzuerkennen, obwohl z.B. für $x=-1$ aus einer falschen Aussage eine wahre impliziert wird und für $x=3$ aus einer falschen Aussage eine falsche impliziert wird.
Damit bleiben die bekannten Umformungsregeln für Gleichungen richtig, auch wenn man von einer falschen Aussage

ausgeht:

$$\begin{aligned} 9 &= 5 && \text{(f)} \\ 9-7 &= 5-7 \\ (9-7)^2 &= (5-7)^2 \\ 9^2 - 2\cdot 9\cdot 7 + 7^2 &= 5^2 - 2\cdot 5\cdot 7 + 7^2 \\ 9^2 - 5^2 &= 2\cdot 7(9-5) && \mid : (9-5) \\ 9+5 &= 2\cdot 7 \\ 14 &= 14 && \text{(w)} \end{aligned}$$

Aus der Tatsache, dass man aus einer Aussage A durch logische Schlüsse (formaler oder inhaltlicher Art) eine wahre Aussage B hergeleitet hat, folgt **nicht** die Richtigkeit der Aussage A. (Man kann heuristisch so vorgehen, muss dann aber die Schlüsse umzukehren versuchen, also zeigen, dass aus B die Aussage A folgt. Auf die Richtung kommt es an!)

5. Genau dann – wenn $\boxed{\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}}$ (Abkürzung für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)

Sprechweisen: A gilt genau dann, wenn B;
A ist notwendig und hinreichend für B;
A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(Entsprechend definieren wir $A(x, y, \dots) \Leftrightarrow B(x, y, \dots)$, wenn für jede Einsetzung aus dem Grundbereich $A(x_1, y_1, \dots) \Leftrightarrow B(x_1, y_1, \dots)$ wahr ist).

Anmerkung. Um Klammern zu sparen, vereinbart man
„$\Leftrightarrow$“ trennt stärker als „$\Rightarrow, \wedge, \vee, \neg$“,
„$\Rightarrow$“ trennt stärker als „$\wedge, \vee, \neg$“ und
„$\wedge, \vee$“ trennt stärker als „$\neg$“.

(d) Einige allgemeingültige Gesetze für Aussagen (Tautologien)
Folgende Aussagen haben stets den Wahrheitswert (w) :

2.1.1 $\boxed{A \vee \neg A}$ **stets (w)** **Möglichkeit zur Fallunterscheidung**

Proof. (Formal-logisch mit Hilfe einer Wahrheitstafel.)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

„tertium non datur“ $\square$

2.1.2 $\boxed{\boldsymbol{A \wedge \neg A} \text{ **ist immer falsch.**}}$ **Satz vom Widerspruch**

Proof.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	f
f	w	f

□

Ähnlich beweist man:

2.1.3 $\boxed{\neg(\neg A) \Leftrightarrow A}$ **Satz von der doppelten Verneinung**

2.1.4 $\boxed{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)}$ **Kontraposition**

2.1.5 $\boxed{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$ **Transitivität**

2.1.6 $\boxed{\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)}$

Schlussbemerkungen: Die obigen Gesetze lassen sich schon von der Form her als wahr erkennen. Solche formal-logischen Schlüsse sind von den „inhaltlich begründeten“ logischen Schlüssen, zu unterscheiden, für die wir allerdings, wie schon angedeutet, ebenfalls das Zeichen „⇒“ benutzen werden. Tiefer-greifende Untersuchungen bleiben Vorlesungen über Grundlagen der Mathematik vorbehalten.

2.2 Mengen und Elemente

M ↓

Der in der Mathematik verwandte Begriff „Menge“ unterscheidet sich von dem umgangssprachlichen (mehr quantitativen).

Beispiel (Mengen im mathematischen Sinne).
Die Menge der am 1. Oktober 2006 an der FU immatrikulierten Studenten.
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.
Die Mengen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen.
Die Menge aller zu einem gegebenen Pfeil vektorgleichen Pfeile der Ebene (Vektor).

Wie lässt sich der Begriff „Menge“ präzisieren? Nach Cantor (1845-1918) ist eine Menge eine „Zusammenfassung von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Diese Beschreibung ist jedoch zu unpräzise. Uneingeschränkte Erzeugung von Mengen führt zu Widersprüchen (s.u.)[8]. Eine erfolgreiche Präzisierung ist erst im Rahmen der axiomatischen Logik möglich. Wir werden im folgenden naiv vorgehen und nicht definieren, was eine Menge ist, sondern lediglich einige Eigenschaften anführen.

↑ M

Die Objekte, mit denen wir uns beschäftigen, bezeichnen wir durch Symbole, z.B. durch Buchstaben oder Ziffern. Dabei dürfen auch verschiedene Symbole dasselbe Objekt darstellen.

Beispiel. $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ bezeichnen dieselbe rationale Zahl: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Dabei bedeutet $a = b$, dass die Symbole a und b dasselbe Objekt repräsentieren (Identität, Gleichheit der Objekte).

Anmerkungen.

[8]Eine Analogie zu Problemen der Mengenbildung weist folgendes Beispiel auf: Der Katalog aller Bücher ist selbst ein Buch und müsste in sich erfasst sein; dann gäbe es ein weiteres Buch.

1. Es sind auch die Schreibfiguren $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ als Objekte denkbar; und diese sind dann verschieden. Die Angabe von Symbolen allein reicht also nicht aus, vielmehr muss jeweils feststehen (ausgesprochen oder unausgesprochen), welche Symbole das selbe Objekt darstellen, für welche Symbole a und b von Objekten also $a = b$ und für welche $a \neq b$ gilt.

2. Von der Gleichheitsbeziehung erwarten wir, dass sie folgende Eigenschaften besitzt:
$$\left.\begin{array}{c} x = x \\ x = y \Leftrightarrow y = x \\ x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \end{array}\right\} \text{für alle Symbole } x,\ y,\ z.$$

3. M↓ Es ist zweckmäßig, bestimmte Gesamtheiten von (Einzel-) Objekten als neue Objekte anzusehen; diese neuen Objekte heißen Mengen, die Einzelobjekte, aus denen eine Menge besteht, heißen Elemente der Menge. Wie oben gesagt, ist die Beschreibung jedoch zu unpräzise für eine Definition. Sie soll uns nur als anschaulicher Hintergrund dienen. Wir fahren daher folgendermaßen fort: ↑M

   Gewisse Objekte sollen **Mengen** heißen. Zwischen einem Objekt x und einer Menge A kann die Beziehung
   $$x \text{ ist Element von } A,$$
   in Zeichen $\boxed{x \in A}$, bestehen. (Negation: $x \notin A$).

2.2.1 Grundeigenschaft der Element-Beziehung (Extensionalitätsaxiom)

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Für Mengen A und B gilt also:
$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

Anmerkung. Diese Eigenschaft präzisiert die Elemente-Beziehung mit Hilfe der Gleichheit, die ja zwischen Objekten schon gegeben ist. Umgekehrt lässt sich mit ihrer Hilfe die Gleichheit von Mengen bei Kenntnis ihrer Elemente nachprüfen.

Folgerung aus (2.2.1): **Eine Menge ist durch Angabe ihrer Elemente vollständig bestimmt** (z.B. durch Aufzählen ihrer Elemente, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt.)
Schreibweise: $A = \{a, b, c, \dots\}$.
Beispiele.

- Die Menge aller Primzahlen zwischen 1 und 12: $\{2, 3, 5, 7, 11\}$.
- $\{2, 4, 6, 8\} = \{6, 4, 8, 2\}$.
- Die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen ist gleich der Menge aller natürlichen Vielfachen von 2.
- Die Menge aller (natürlichen) Teiler von 8 ist $T_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.

Anmerkung (1). Dass umgekehrt durch konkretes Aufzählen von Elementen eine Menge beschrieben wird, ist nicht selbstverständlich, es folgt jedoch aus der folgenden Grundeigenschaft **„Paarmengenaxiom“** und der später geforderten Möglichkeit der Bildung von „Vereinigungsmengen“.

2.2.2 Paarmengenaxiom

Sind a und b Objekte, so gibt es eine Menge C mit

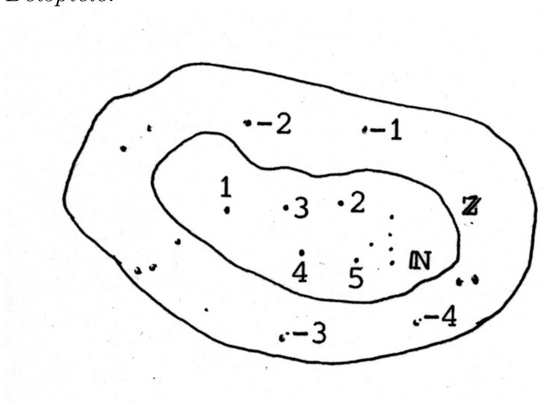
$$\forall d : (d \in C \Leftrightarrow d = a \vee d = b)$$

(Schreibweise: $C = \{a, b\}$)

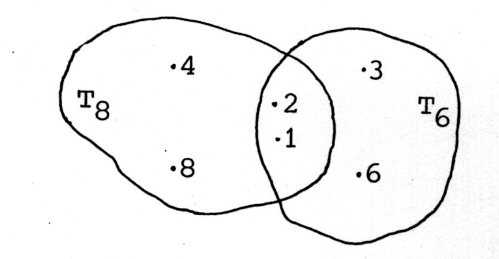
Anmerkung (2). In Übereinstimmung mit der von der Gleichheit von Objekten erwarteten Eigenschaften ergibt sich (aus den Eigenschaften der doppelten Implikation (2.1 c5)) für alle Mengen A, B, C

$A = A$	Reflexivität	(1)
$A = B \Rightarrow B = A$	Symmetrie	(2)
$(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$	Transitivität	(3)

Graphische Veranschaulichung von Mengen im sogenannten **Venn-Diagramm**:
Beispiele.



Figur 2.1 a: Venn-Diagramm zu $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$



Figur 2.1 b: Venn-Diagramm von T_6 und T_8 (mit T_n gleich der Menge der natürlichen Teiler von n).

2.2.3 Definition: Inklusion

Sind A und B Mengen, und ist jedes Element von A Element von B, so heißt

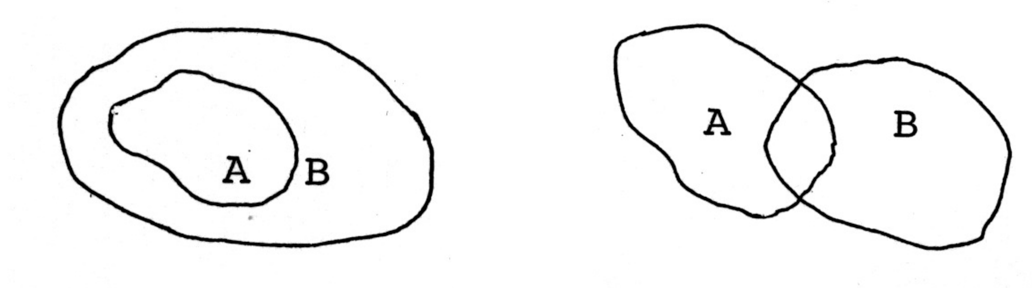
A **Teilmenge von** B

bzw. B **Obermenge** von A; in Zeichen $A \subseteq B$ bzw. $B \supseteq A$. Also:

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)}\ .$$

Beispiel. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

Venn-Diagramme:



$A \subseteq B$ $\qquad\qquad$ $A \not\subseteq B$

Figur 2.2: Beispiele von Venn-Diagrammen zur Teilmengenbeziehung

Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A **echte Teilmenge** von B. Schreibweise: $A \subsetneqq B$.

2.2.4 Eigenschaften der Inklusion

Für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \subseteq A \qquad \text{Reflexivität} \tag{4}$$
$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B \qquad \text{Antisymmetrie} \tag{5}$$
$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C \qquad \text{Transitivität} \tag{6}$$

Beweis der Antisymmetrie.
Aus $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ und $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \\
&\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A) && \text{Einsetzen} \\
&\Leftrightarrow \forall x : [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] && \text{Eigenschaften des Allquantors (hier ohne Beweis)} \\
&\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow A = B && (2.2.1)\ .
\end{aligned}$$

Beweisen Sie (6) und (8)! □

Anmerkung. Eine wichtige Methode, die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, besteht nach (2) in dem **Nachweis**, dass jede in der anderen enthalten ist. (Nachweis der **doppelten Inklusion**).

Die Angabe einer Teilmenge C von A erfolgt meist nicht durch Aufzählen der Elemente von C, sondern durch Angabe von Eigenschaften, die allen Elementen von C, aber keinen weiteren Elementen von A zukommen.

Beispiel. Die Menge $\mathbb{P}$ aller natürlichen Primzahlen: Ist $T(x)$ die Aussageform. „x ist Primzahl“, so ist $\mathbb{P}$ die Menge für die gilt:

$$\forall x : [x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{N} \wedge T(x))].$$

Man könnte nun meinen, dass sich mit Hilfe von Aussageformen beliebige Mengen bilden lassen. Für **Teilmengen** wollen wir dies als weitere Grundeigenschaft des Mengen-Begriffes (also einer Eigenschaft, die wir mit dem Begriff „Menge“ verbinden, aber nicht beweisen können) fordern:

2.2.5 Erzeugungsprinzip für Teilmengen (Aussonderungsaxiom)

Sei A eine Menge und $T(x)$ eine Aussageform, zu deren Grundbereich die Elemente von A gehören. **Dann gibt es eine Teilmenge *C*** derart, dass für alle x gilt:

$$x \in C \Leftrightarrow [x \in A \wedge T(x)].$$

Schreibweisen: $C = \{x : x \in A \wedge T(x)\}$ oder

$$\boxed{C = \{x \in A : T(x)\}}$$

Beispiel. $A = \mathbb{N}, \quad T(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
$L_1 = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - x - 2 = 0)\}$ (Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ über $\mathbb{N}$)
(*Anmerkung:* Aus der Theorie der quadratischen Gleichungen über $\mathbb{R}$ wissen wir, dass $x^2-x-2=0$ äquivalent ist mit $x = 2 \vee x = -1$. Wegen $-1 \notin \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gilt dann $L_1 = \{2\}$.)

Denken wir an „unlösbare“ Gleichungen! Nach den Grundeigenschaften der Gleichheitsbeziehung geht z.B. $x \neq x$ (als $T(x)$) bei keiner Einsetzung in eine wahre Aussage über.

2.2.6 Hilfssatz:

(a) *Die Teilmenge* $\boxed{\emptyset_A := \{x \in A : x \neq x\}}$ *von A enthält kein Element. Es gilt also:* $\forall x : x \notin \emptyset_A$.

Ist $F(x)$ irgendeine Aussageform, so gilt für jedes x des Grundbereichs:
$x \in \emptyset_A \Rightarrow F(x)$; denn $x \in \emptyset_A$ ist stets falsch (vgl. (2.1)c4).
Ist B eine zweite Menge, so folgt daher $\forall x : (x \in \emptyset_A \Leftrightarrow x \in \emptyset_B)$. Nach (2.2.1) heißt das:

(b) *Für alle Mengen A, B gilt:* $\boxed{\emptyset_A = \emptyset_B}$.

$\emptyset_A$ ist also unabhängig von A. Es gibt nur eine Menge „ohne Elemente“. Wir nennen sie die **leere Menge**.

Schreibweise: $\emptyset$ $(= \emptyset_A = \emptyset_B)$. Für sie gilt:

(c) $\boxed{\forall x : x \notin \emptyset}$ und

(d) $\boxed{\emptyset \subseteq A}$ für jede Menge A.

Anmerkung: URL zur „leeren Menge“ : www.mathematik.de/fuenfminuten
„13. Die Existenz der leeren Menge macht Sinn.“

Wir haben ein Verfahren kennen gelernt, mit Hilfe von Aussageformen aus einer Menge neue (Teil-) Mengen zu bilden (auszusondern). Die Beschränkung auf Teilmengen ist dabei von Bedeutung; entgegen ersten Vermutungen kann eine Verallgemeinerung zu Widersprüchen führen. Als Beispiel dafür sei die **Antinomie von B. Russel** angeführt: Die Bildung $A = \{x : x \notin x\}$ ist nicht erlaubt: Denn die beiden (einzigen) Fälle $A \in A (\Rightarrow A \notin A)$ und $A \notin A (\Rightarrow A \in A)$ führen zu Widersprüchen.

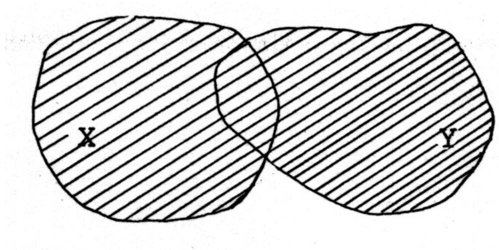
Schon im alten Griechenland war bekannt: Wenn sich Aussagen auf sich selbst beziehen können, kommt es eventuell zu Problemen Ein Beispiel ist die Aussage: „ Ich lüge. “ (Warum ?) M $\downarrow$
Bekannt ist auch das „**Paradoxon des Dorfbarbiers**“. Dieser Barbier hat sich darauf spezialisiert, alle Männer des Dorfes zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, und auch keine anderen. Was ist aber dann mit ihm selbst ?
Siehe auch folgende URL: www.mathematik.de/fuenfminuten $\uparrow$ M

2.2.7 Definition der Mengenoperationen $\cup$, $\cap$

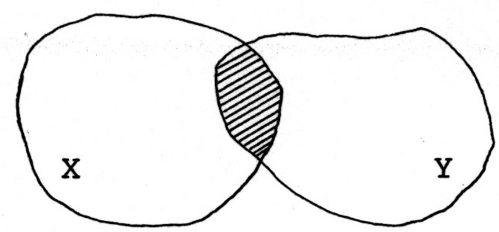
Seien X, Y Teilmengen einer Menge M.

(a) $X \cup Y := \{z : z \in X \vee z \in Y\}$ heißt **Vereinigungsmenge** von X und Y.

(b) $X \cap Y = \{z : z \in X \wedge z \in Y\}$ heißt **Schnittmenge** von X und Y (**Durchschnitt**).



$X \cup Y$



$X \cap Y$

Figur 2.3: Venn-Diagramme zu Vereinigungs- und Durchschnitsmenge.

Beispiele.

1) $\left.\begin{array}{l} X = T_8 = \{1,2,4,8\} \\ Y = T_6 = \{1,2,3,6\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X \cup Y & = & \{1,2,3,4,6,8\} \\ X \cap Y & = & \{1,2\} \end{array}\right.$.

2) Seien $L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \wedge 2x - 3y = 0 \right\}$ und $L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \wedge x + y = 1 \right\}$.

Dann ist $L = L_1 \cap L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \wedge 2x - 3y = 0 \wedge x + y = 1 \right\}$ Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 0 \\ x & + & y & = & 1. \end{array} \right.$$

Anmerkung: Zur Existenz der Menge $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ s. (2.2.11) !

3) $\left.\begin{array}{l} X = \mathbb{G} \quad \text{(Menge der geraden Zahlen)} \\ Y = \{1,3,9\} \end{array}\right\} \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$.

Anmerkung. a) Vereinigung und Durchschnitt von Teilmengen von M existieren aufgrund des Aussonderungsaxioms. Für beliebige Mengen werden wir die Existenz der Vereinigungsmenge später fordern.

b) Falls $X \cap Y = \emptyset$ gilt, nennen wir X und Y **disjunkt**.

2.2.8 Eigenschaften von Vereinigung und Durchschnitt von Teilmengen

Seien X, Y Teilmengen von M. Dann gilt:

(a) Kommutativität:

$\boxed{X \cup Y = Y \cup X}$

Beweis-Andeutung:
Es genügt, $X \cup Y \subseteq Y \cup X$ zu zeigen; (warum?).
$\forall z \in M : (z \in X \cup Y \Rightarrow z \in X \vee z \in Y \Rightarrow$
$z \in Y \vee z \in X \Rightarrow z \in Y \cup X)$ [9]

$\boxed{X \cap Y = Y \cap X}$

Beweis . . .

Beweis . . .

(b) Assoziativität:

$\boxed{X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z}$

Beweis . . .

$\boxed{X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z}$

Beweis . . .

(c) Distributivität:

$\boxed{X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)}$

Beweis . . .

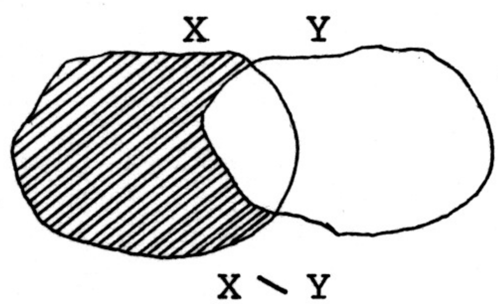
$\boxed{X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)}$

Beweis . . .

2.2.9 Definition und Eigenschaften von Differenz und Komplement

(a) **Definition Differenz**: Für Mengen X, Y definieren wir (siehe Figur 2.4 !):

$X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$.

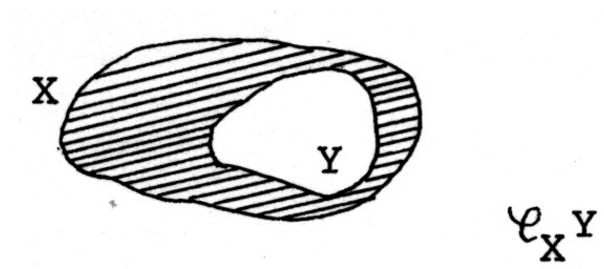


Figur 2.4: Venn-Diagramm zur Mengendifferenz

(b) **Definition Komplement** (Spezialfall von (a)):

Im Falle $Y \subseteq X$ heißt $X \setminus Y$ Komplement von Y in X, in Zeichen $\complement_X Y$.

[9]Den Beweis von $A \vee B = B \vee A$ für Aussagen A, B führt man mit Hilfe einer Wahrheitstafel!



Figur 2.5: Venn-Diagramm zum Mengen-Komplement $\complement_X Y$

(c) Zurückführung der Differenz-Bildung auf die Komplementbildung:
$X \setminus Y = \complement_X (X \cap Y)$.

(d) **Definition Symmetrische Differenz**
Für $A, B \subseteq X$ definiert man:
$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(e) **Regeln von de Morgan**: Für $Y, Z \subseteq X$ und $\complement = \complement_X$ gilt:

$\complement(\complement Y) = Y$ $\complement(Y \cup Z) = \complement Y \cap \complement Z$	$Z \subseteq Y \Leftrightarrow \complement Y \subseteq \complement Z$ $\complement(Y \cap Z) = \complement Y \cup \complement Z$

Beweis ...

Ohne auf Widersprüche zu stoßen, fordern wir als weitere Grundeigenschaft, dass folgende Bildungen zu Mengen führen:

2.2.10 Bildung der Potenzmenge (Potenzmengenaxiom)

Zu jeder Menge A existiert die Menge[10]

$$\boxed{\wp(A) := \{X : X \text{ Teilmenge von A}\}}$$

$\wp(A)$ heißt **Potenzmenge** von A.

Beispiele:

(i) $A = \{a\}$ (einelementige Menge)$\Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, A\}$.

(ii) $A = \{a, b\} \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

Anmerkung. 1.) Stets gilt $\emptyset \in \wp(A)$, $A \in \wp(A)$ sowie $\{x_1\} \in \wp(A)$, falls $x_1 \in A$.
2.) Beachten Sie auch Aufgabe 5.2 !

[10]Anmerkung: Wir verwenden diese Schreibweise, auch wenn hier nicht aus einer umfassenden Menge ausgesondert wird.

2.2.11 Bildung eines kartesischen Produktes zweier Mengen

(a) Seien X und Y Mengen. Zu Elementen x und y mit $x \in X$ und $y \in Y$ können wir ein neues Objekt bilden, das

geordnete Paar (x, y).

Näher beschrieben werden die geordneten Paare durch eine Bedingung für die Gleichheit:

$$\boxed{(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow (x = \bar{x} \wedge y = \bar{y})}.$$

Anmerkung: Es ist möglich (x, y) als Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ zu definieren.

(b) (Grundeigenschaft: vgl. dazu aber die Anmerkung nach (2.6.1): Es existiert die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$; sie heißt „das **kartesische Produkt**“ von X und Y; in Zeichen:

$$\boxed{X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}}.$$

Beispiele:

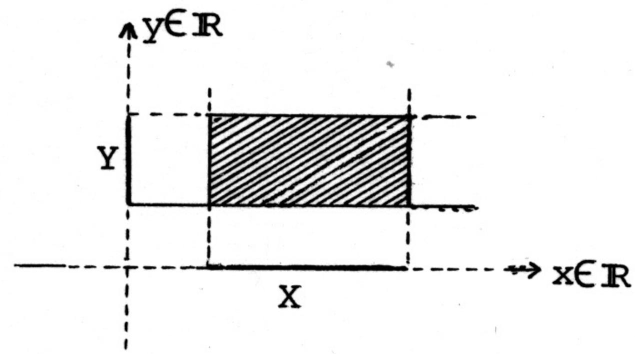
1.) Für $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{1, 2, 3\}$ ist

$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Tabellarische Darstellung:

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$
2	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$.

2.) Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ist $X \times Y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. (S. Figur 2.6 !)



Figur 2.6: Veranschauung eines Beispiels zu $X \times Y$.

Anmerkungen.

a) Bei einer zweielementigen **Menge** kommt es auf die Reihenfolge der Angabe der Elemente nicht an:

$$\{x, y\} = \{y, x\};$$

anders jedoch bei einem **geordneten Paar**:

$$x \neq y \;\Rightarrow\; (x, y) \neq (y, x).$$

b) $(x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y)$.

c) $X^2 := X \times X$.

d) $X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z$; also $(x, y, z) := ((x, y), z)$.

e) $X^3 := X \times X \times X$.

Anmerkung: Die behandelten Prinzipien orientieren sich an dem Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel (ZF).

2.3 Relationen

M ↓

Mit Hilfe von Paaren lassen sich Beziehungen, die zwischen den Elementen zweier Mengen bestehen, formal beschreiben:
Seien z.B. $X = \{a, b, c, d\}$ eine Menge von Personen und
$Y = \{s, t, u\}$ eine Menge von Vereinen.
Die Mitgliedschaftsbeziehung lässt sich dann u.a. in Form einer Tabelle angeben, z.B.:

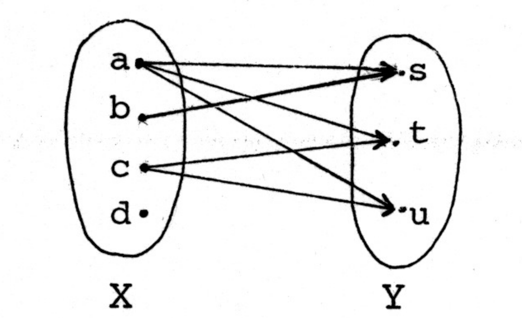
	s	t	u
a	×	×	×
b	×		
c		×	×
d			

(Hier ist also
a Mitglied der Vereine s, t, u
b Mitglied des Vereins s
c Mitglied der Vereine t, u
d Mitglied in keinem dieser Vereine.)

Ein Vergleich mit der tabellarischen Darstellung bei der Bildung des kartesischen Produktes legt auch folgende Beschreibungsform nahe: Angabe der „auftretenden“ Paare, d.h. derjenigen Paare (x, y) in $X \times Y$, für die gilt: x ist Mitglied von y.
Hier erhalten wir die Paare:

$$(a, s), (a, t), (a, u), (b, s), (c, t), (c, u).$$

Der beschriebene Sachverhalt lässt sich auch als „Zuordnung“ interpretieren, was zu Darstellung der Figur 2.7, einem „Pfeil-Diagramm“, führt.



Figur 2.7: Beispiel eines Pfeil-Diagramms

↑ M

2.3.1 Definition: Relation

Seien X, Y Mengen, sei $R \subseteq X \times Y$. Dann heißt (R, X, Y) zweistellige **Relation** zwischen X und Y. Die Menge R heißt **Graph** der Relation.

Anmerkung. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, sprechen wir auch von R allein als Relation zwischen X und Y (bzw. im Falle $X = Y$ als **Relation auf** X).
Ist $\rho = (R, X, Y)$ Relation, so benutzen wir folgende Schreibweise:

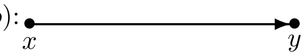
$$\boxed{x \,\rho\, y :\Leftrightarrow (x, y) \in R} \qquad \text{für } x \in X, y \in Y.$$

(x steht in der Relation ρ zu y).
Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, benutzen wir auch die Schreibeise xRy.

Möglichkeiten der Veranschaulichung einer Relation $\rho = (R, X, Y)$ u.a. durch

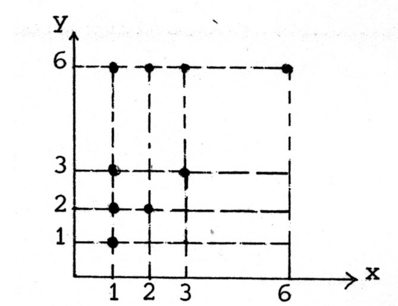
(a) Hervorhebung der Elemente von R im Diagramm von $X \times Y$ (**Darstellung des Graphen** von ρ);

(b) Verdeutlichung der Zuordnung mittels Pfeilen zwischen den Elementen von X und denen von Y

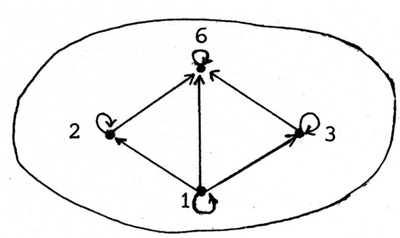
in den entsprechenden Venn-Diagrammen (**Pfeil-Diagramm** zu ρ):


bedeute dabei $x \,\rho\, y$!

Beispiel (1). Seien $X = Y = T_6 := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Teiler von } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ und
$R := \{(x, y) \in T_6 \times T_6 : x \text{ ist Teiler von } y\}$
$\quad = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$;
dann heißt (R, T_6, T_6) Teilbarkeitsrelation auf T_6.



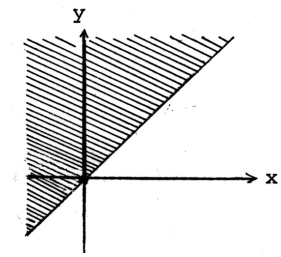
Figur 2.8a: Zu Beispiel (1):Darstellung des Graphen



Figur 2.8 b Pfeil-Diagramm zu Bsp. (1).

(Ähnlich lässt sich eine Teilbarkeitsrelation auf anderen Teilmengen von $\mathbb{N}$ definieren.)

Beispiel (2). Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$. Die (hier nicht genau definierte) Relation $\leq = (R, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ heißt natürliche Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.



Figur 2.9: Teildarstellung des Graphen der Relation $\leq$

Das Pfeil-Diagramm ist, auch ausschnittsweise, nicht darstellbar.

Beispiel (3). Seien A eine beliebige Menge und $X = Y = A$; dann heißt

$$\triangle_A := \{(x, y) \in A \times A : x = y\}$$

Diagonale von $A \times A$. (Beachten Sie z.B. die Darstellung in einer Tabelle wie auf Seite 40 ! Welche graphische Darstellung hat $\triangle_{\mathbb{R}}$?)
Die Relation $\mathrm{id}_A := (\triangle_A, A, A)$ heißt Gleichheitsrelation oder auch **Identität** auf A; denn

$$x \ \mathrm{id}_A \ y \Leftrightarrow x = y.$$

Wie sieht das Pfeil-Diagramm von id_A aus?

2.3.2 Definition: Umkehrrelation

Sei $\rho = (R, X, Y)$ Relation. Dann heißt die Relation $\rho^{-1} := (R^{-1}, Y, X)$ mit $R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R)\}$ inverse Relation oder **Umkehrrelation** von ρ. (Andere Schreibweise: ρ^{-}.)
Also:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \text{bzw.} \boxed{x\rho y \Leftrightarrow y\rho^{-1}x}.$$

Beispiele

- Umkehr-Relation von „$\leq$“ (siehe Beispiel 2 oben) ist „$\geq$“.
- Umkehr-Relation der Relation „ist Teiler von“ auf $\mathbb{N}$ ist die Relation „ist Vielfaches von“ auf $\mathbb{N}$.
- Umkehr-Relation der Relation „$\subseteq$“ auf $\wp(X)$, ist „$\supseteq$“.
- $(\mathrm{id}_A)^{-1} = id_A$

Bestimmen Sie $(\rho^{-1})^{-1}$!
Im Folgenden sei M eine Menge und $X = Y = M$; unter den Relationen auf M spielen zwei Typen eine fundamentale Rolle: die Äquivalenzrelationen und die Ordnungsrelationen; sie sind gekennzeichnet durch, Gesetzmäßigkeiten, die uns bei Gleichheitsrelationen bzw. bei den Relationen „$\leq$“ auf $\mathbb{R}$ bzw. „$\subseteq$“ auf $\wp(A)$ schon begegnet sind.

2.3.3 Definition: Äquivalenzrelation

Sei M Menge, ρ Relation auf M. Dann heißt ρ Äquivalenzrelation auf M, wenn gilt:

$$\left.\boxed{\begin{array}{lll} (1) & \text{Reflexivität} & x\rho x \\ (2) & \text{Symmetrie} & x\rho y \Leftrightarrow y\rho x \\ (3) & \text{Transitivität} & (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z \end{array}}\right\} \text{ f.a. } x, y, z \in M.$$

Schreibweisen: Für eine Äquivalenzrelation verwendet man oft die Symbole $\sim$
(also $x \sim y$), oder $\approx$ oder $\equiv$, um damit die Ähnlichkeit zur Gleichheitsrelation zu betonen.

M ↓

Beispiele. id_M ist Äquivalenzrelation auf M.
Die Vektorgleichheit ist Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile der Ebene.
Die Kongruenz von Figuren der Ebene „ $\stackrel{\triangle}{=}$ “ ist eine Äquivalenzrelation.

↑ M

Beispiel. Auf $M = \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen) definieren wir nach Auswahl eines festen $m \in \mathbb{N}$ eine Relation „$\equiv$“ durch

$$x \equiv y :\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : x - y = t \cdot m \quad (\Leftrightarrow m \text{ teilt } \ (x - y)).$$

$\equiv$ ist dann Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ (nachprüfen!).
Bezeichnung: **Kongruenz modulo *m***
Präzisere Schreibweise: $x \equiv y \pmod m$ oder auch nur $x \equiv y \ (m)$.
Anmerkung:
Haben die ganzen Zahlen x und y den gleichen Rest r bei Division durch m, existieren also t_1 und t_2 mit $x = t_1 m + r$ und $y = t_2 m + r$, so folgt ebenfalls $x \equiv y \pmod m$. Umgekehrt haben modulo m kongruente Zahlen den gleichen (nicht-negativen) Rest (kleiner m).

2.3.4 Definition: Äquivalenzklasse

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann heißt für jedes $a \in M$ die Menge

$$[a] := \{b \in M : b \sim a\}$$

die Äquivalenzklasse von a, und a ist ein **Repräsentant** von $[a]$.

Beispiele.

(a) Für die Äquivalenzrelation „Kongruenz mod 2 “ gilt mit $\quad \bar{a} := [a] \quad$ z.B.:
$\bar{1} = [1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ ungerade }\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = -\bar{3} = \bar{3} = -\bar{5} = \bar{5} \dots$
$\bar{0} = [0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ gerade }\} = -\bar{2} = \bar{2} = -\bar{4} = \bar{4} = \dots$

(b) Äquivalenzrelation Vektorgleichheit: $\quad [\overrightarrow{AB}] =$ Vektor mit Repräsentant $\overrightarrow{AB}$

2.3.5 Satz

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt für die Menge $M/\sim := \{[a] : a \in M\}$ der Äquivalenzklassen:

(i) $a \in [a]$ für alle $a \in M$;

(ii) $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ für alle $[a], [b] \in M/\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$ bildet eine Partition von M.

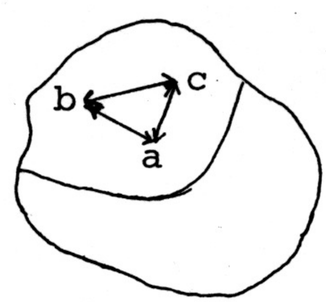
Dabei definieren wir den Begriff Partition folgendermaßen:

2.3.6 Definition

$\mathcal{T} \subseteq \wp(M)$ heißt **Partition** (**Faserung, disjunkte Zerlegung**), wenn gilt:
(1) $\forall x \in M\ \exists T \in \mathcal{T} : x \in T$ (Überdeckungseigenschaft)
(2) $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T} : (T_1 \neq T_2 \Rightarrow T_1 \cap T_2 = \emptyset)$ (paarweise disjunkte Mengen).
Oft fordert man noch:
(3) $\emptyset \notin \mathcal{T}$
Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **Fasern** oder **Komponenten**.
Beweis von (2.3.5) :

(i) $\forall a \in M : a \sim a \Rightarrow \forall a \in M : a \in [a]$.

(ii) Seien $[a], [b]$ Äquivalenzklassen.
1. Fall: $a \sim b$
Dann $c \in [a] \Rightarrow c \sim a$
$\underset{a \sim b}{\Rightarrow} c \sim b$
$\overset{\text{Transitivität von } \sim}{\Rightarrow} c \in [b]$;
also $[a] \subseteq [b]$.



Figur 2.10: Zum Beweis von (2.3.5)

Aus Symmetriegründen, also wegen $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$, gilt auch $[b] \subseteq [a]$ damit $[a] = [b]$. Die Voraussetzung (ii) aus Satz 2.3.5 ist damit nicht erfüllt.
2. Fall: $a \not\sim b$
Sei $c \in [a] \cap [b]$; dann ist $c \sim a$ und $c \sim b$, wegen der Symmetrie und Transitivität von $\sim$ also $a \sim b$. Widerspruch. Also existiert kein $c \in [a] \cap [b]$, d.h. $[a] \cap [b] = \emptyset$.

$\square$

Anmerkung. Umgekehrt gehört zu jeder Partition $\mathcal{T}$ eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen gerade die Fasern von $\mathcal{T}$ sind.

Beispiel. Für $M := \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ und die Äquivalenzrelation „**Kongruenz modulo m**" erhält man

$$\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z} \,/ \equiv\, = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots \overline{m-1}\},$$

wobei $\bar{r} = m \cdot \mathbb{Z} + r$ ist. Es gilt auch

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{m-1} \bar{r}.$$

Anmerkung: Auf $\mathbb{Z}_m$ kann man eine Addition und eine Multiplikation durch folgende Festsetzung definieren:

$$\overline{r_1} \oplus \overline{r_2} = (r_1 + m\mathbb{Z}) \oplus (r_2 + m\mathbb{Z}) := r_1 + r_2 + m\mathbb{Z} = \overline{r_1 + r_2}$$

bzw.

$$\overline{r_1} \odot \overline{r_2} = (r_1 + m\mathbb{Z}) \odot (r_2 + m\mathbb{Z}) := r_1 \cdot r_2 + m\mathbb{Z} = \overline{r_1 \cdot r_2}.$$

An der gewählten Art der Definition sieht man sofort, dass Summe und Produkt wohldefiniert sind, d.h. dass sie eindeutig bestimmt sind, insbesondere unabhängig von den speziellen Repräsentanten der Äquivalenzklassen.

2.3.7 Definition: Ordnungsrelation

Sei A Menge, ρ Relation auf A. Dann heißt ρ Ordnungsrelation und (A, ρ) **geordnete Menge** (A bzgl. ρ geordnete Menge), wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt:

(1)	$x\rho x$	Reflexivität
(2)	$(x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$	**Antisymmetrie**
(3)	$(x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$	Transitivität

(Konsequenzen für das Pfeil-Diagramm einer Ordnungsrelation ?)
Schreibweise: Falls über die Bezeichnung der Relation frei verfügt werden kann, wählt man als Symbol oft „ $\preceq$ ", um so den Charakter der Verallgemeinerung der natürlichen Ordnungsrelation „$\leq$" auf $\mathbb{R}$ hervorzuheben.

Anmerkung. Manche Autoren sprechen hier auch von einer „teilweisen" oder „Halb-Ordnung" und behalten sich „Ordnung" für eine speziellere Begriffsbildung vor („totale Ordnung", s.u.).

Beispiele geordneter Mengen. $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\wp(X), \subseteq)$, (M, id_M) .
(Beweis der beiden letzten Behauptungen durch Nachprüfen der Gesetze (1) bis (3); die erste Behauptung lässt sich noch nicht nachprüfen, da wir $(\mathbb{R}, \leq)$ nur als intuitiv bekannt voraussetzen.)

Beispiele.

(1) Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Relation $\leq_{\mathbb{Z}}$ durch

$$r \leq_{\mathbb{Z}} s :\Leftrightarrow (r = s \vee (\exists n \in \mathbb{N} : r + n = s) \ .$$

$\leq_{\mathbb{Z}}$ ist dann die Relation „kleiner gleich" auf $\mathbb{Z}$. Mit obiger Definition werden dann, (falls die Eigenschaften der Addition auf $\mathbb{N}$ bekannt sind) die Gesetze (1) bis (3) nachprüfbar.

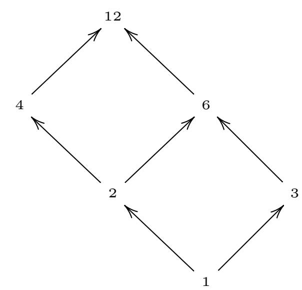
(2) Auf $\mathbb{N}$ definieren wir eine Relation „ | “ durch

$$(n|m :\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N} : n \cdot b = m) \text{ f. a. } n, m \in \mathbb{N}.$$

Sie ist die (Ordnungs-) Relation „**ist Teiler von**“ auf $\mathbb{N}$ (Teilbarkeitsrelation).

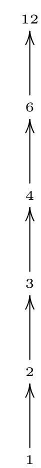
Anmerkung. Die Teilbarkeitsrelation auf T_k lässt sich dann durch Einschränkung der betrachteten Elemente m, n auf Elemente von T_k aus der Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ gewinnen.

Ist $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, so heißt das nicht, dass zwei Elemente $x, y \in M$ „vergleichbar“ sind, dass also $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. In $(T_{12}, |)$ sind z.B. 4 und 6 nicht vergleichbar. M ↓



Figur 2.11: Pfeildiagramm von $(T_{12}, |)$
(ohne Schleifen und ohne Überbrückungspfeile)[11]

Im Gegensatz dazu lassen sich in $(T_{12}, \leq)$ je zwei Elemente vergleichen. (Hierbei sei $\leq$ die natürlich gegebene $\leq$ Relation, die von $(\mathbb{N}, \leq)$ in T_{12} „induziert“ wird). ↑ M



Figur 2.12: Pfeil-Diagramm von $(T_{12}, \leq)$
(ohne Schleifen und Brücken)

2.3.8 Definition

Eine Menge M heißt **total geordnet** (**linear geordnet**) und $\leq$ totale Ordnungsrelation, wenn gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (M, \leq) \text{ ist geordnete Menge .} \\ (2) & \forall x, y \in M : (x \leq y \vee y \leq x). \end{array}}$$

[11] Ordnet man, wie in den Figuren 2.11 und 2.12, die Elemente so an, dass die Pfeile von unten nach oben zeigen, so kann man auch die Pfeilrichtungen (also die Spitzen) weglassen. Ein solches Diagramm ohne Schleifen und Brücken heißt **Hasse-Diagramm**.

Beispiele. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist total geordnet.
$(\wp(X), \subseteq)$ ist nicht total geordnet, wenn X mindestens 2 verschiedene Elemente enthält.
$(T_n, |)$ ist nur dann total geordnet, wenn $n = p^s$ und p Primzahl ist.

2.4 Abbildungen

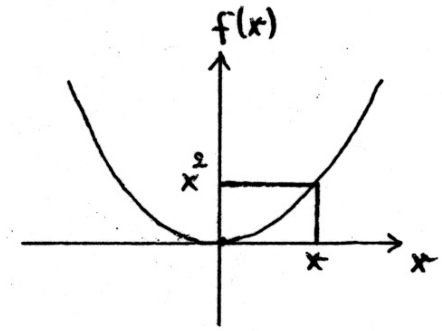
M ↓

Aus der Schulgeometrie sind uns schon viele Abbildungen bekannt, z.B. Kongruenz-Abbildungen (besonders Spiegelungen, Drehungen, Parallelverschiebungen), andere Ähnlichkeitsabbildungen (z.B. Streckungen) und andere affine Abbildungen. Auch funktionale Zusammenhänge lassen sich als Abbildungen beschreiben; so lässt sich $y = f(x)$ (für $x \in D$, dem Definitionsbereich, und $f(x) \in W$, dem Wertebereich oder Zielbereich) als Zuordnungs-Vorschrift interpretieren: „Jedem $x \in D$ wird durch f der Wert $y = f(x)$ zugeordnet."

Beispiel. $f : y = x^2 \quad (D = W = \mathbb{R})$

Werte-Tabelle von f (Ausschnitt):

x	$f(x) = x^2$
-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
1	1
$\sqrt{2}$	2



Figur 2.13: Darstellung des Graphen von f („Graph" von f)

Die Punkte des „Graphen" haben die Koordinaten (x, x^2), allgemein $(x, f(x))$.
Obwohl bei den erwähnten Abbildungen und Funktionen der Zuordnungscharakter stärker im Vordergrund steht, ist es zweckmäßig, sie als spezielle Relationen einzuführen. Dabei sollte der Graph einer solchen Relation

$$G_f = \{(x, y) \in D \times W : y = f(x)\}$$

sein.
Umgekehrt werden wir eine Relation f nur dann Funktion oder Abbildung nennen, wenn es zu jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ gibt mit $(x, y) \in G_f$. (Interpretation im Pfeil-Diagramm?)

↑ M

2.4.1 Definition: linkstotal, rechtseindeutig

Seien X, Y Mengen und $\rho = (R, X, Y)$ eine Relation zwischen X und Y. Dann heißt

(i) ρ **linkstotal**, wenn $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in R$ gilt.

(ii) ρ **rechtseindeutig**, wenn $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y) : ((x\rho y_1 \wedge x\rho y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$.

2.4.2 Definition: Abbildung

Eine Relation f zwischen X und Y heißt **Abbildung von X in Y** (synonym: **Funktion** auf X mit Werten in Y), wenn f **linkstotal** und **rechtseindeutig** ist.

Anmerkung. Wir unterscheiden also nicht zwischen „Abbildung" und „Funktion".

Wir vereinbaren folgende Terminologie:

(a) X heißt **Definitionsbereich** und Y **Wertebereich** oder **Zielbereich** von f:
$$X = D(f),\, Y = W(f).$$

(b) Für eine Abbildung f gilt: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $x\ f\ y$. Wir sagen: Jedem $x \in X$ ist durch f genau ein $y \in Y$ zugeordnet; dieses y bezeichnen wir auch mit $f(x)$.

Die **Zuordnungsvorschrift** geben wir meist in der Form
$$x \mapsto f(x)$$
oder $x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ an, manchmal auch allein durch die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

(c) $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ heißt **Graph** von f; bei Zahlenmengen lässt, sich der Graph in einem Koordinatensystem darstellen. Auch bei dieser Darstellung spricht man vom Graphen der Abbildung (der Funktion).

(d) Statt $f = (G_f, X, Y)$ schreiben wir bei Abbildung meist $f : X \to Y$

Also: Eine Abbildung (Funktion) mit vorgegebenem Werte-Bereich wird durch drei Angaben festgelegt: Definitions-Bereich, Werte-Bereich, Zuordnungs-Vorschrift:

Schreibweise: $\quad f : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad$ oder $f : X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$.

> Zwei Abbildungen (mit vorgegebenem Werte-Bereich)
> $$f : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g : \begin{cases} X' \to Y' \\ v \mapsto g(v) \end{cases}$$
> sind also genau dann gleich, wenn gilt:
> $$X = X' \wedge Y = Y' \wedge \forall x \in X (= X') : f(x) = g(x).$$

Beispiel. Bezeichne $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen! Die Abbildungen (mit vorgegebenem Werte-Bereich)
$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ und $g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ sind verschieden, da $W(f_1) \neq W(g_1)$ ist.

Anmerkung. Oft fasst man den Begriff „Abbildung" bzw. „Funktion" weiter, so dass im letzten Beispiel auch f_1 und g_1 als gleich angesehen werden können: **Eine alternative Möglichkeit ist es, eine Funktion f als ihren Graphen $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ zu definieren**. (Deshalb sprachen wir von Abbildungen mit vorgegebenem Werte-Bereich.)

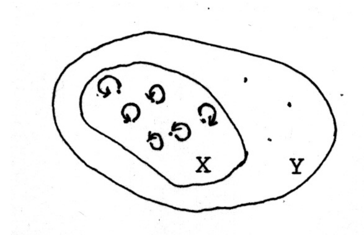
Spezialfälle:

2.4.3 Definition:

(a) Seien X, Y Mengen, $y_0 \in Y$. $\quad f_{y_0} : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto y_0 \end{cases}$ heißt **konstante Abbildung** mit Wert y_0.

(Wie sieht das Pfeildiagramm von f_{y_0} aus?)

(b) Seien X, Y Mengen mit $X \subseteq Y$. Dann heißt $j_{X\to Y} : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto x \end{cases}$ kanonische (natürliche) **Injektion** oder **Einbettung** von X in Y.



Figur 2.14:
Pfeil-Diagramm der kanonischen Injektion $j_{X\to Y}$

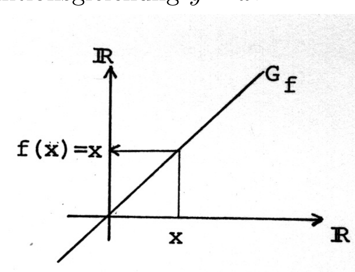
Die Injektion unterscheidet sich nur durch den Wertebereich von folgender Abbildung:

(c) $\mathrm{id}_X = j_{X\to X}$ heißt **Identität**, **identische Abbildung auf** X

Beispiele:

(i) Für $X = \mathbb{R}^2$ (als Punkte-Menge der euklidischen Ebene) ist id_X diejenige Abbildung, die jeden Punkt auf sich abbildet.

(ii) Für $X = \mathbb{R}$ ist $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ ist die reelle Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x$.



Figur 2.15:
Darstellung des Graphen von $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ (Ausschnitt).

(d) Sei $f : X \to Y$ Abbildung und $A \subseteq X$. Dann heißt $g = f|_A : \begin{cases} A \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ die **Einschränkung** (oder **Restriktion**) von f auf A.

Umgekehrt heißt f eine **Fortsetzung** von g auf X.

Ist $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y' \subseteq Y$, so ist auch $f_{A\to Y'} : \begin{cases} A \to Y' \\ x \mapsto f(x)\ . \end{cases}$ definiert.

Anmerkung. (i) Für $a \in A$ gilt insbesondere $f|_A(a) = f(a)$.

(ii) Die Einschränkung von f auf A ist eindeutig bestimmt, jedoch existieren i.a. mehrere Fortsetzungen von $f|_A$ auf X.

(iii) Die Abbildung $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit den Zuordnungen

$$\begin{aligned} (0,0) &\mapsto 0 \\ (0,1) &\mapsto 1 \\ (1,0) &\mapsto 1 \\ (1,1) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

steht in engstem Zusammenhang mit der in ((1.5) definierten Addition auf $\{0,1\}$, nämlich $f : (x,y) \mapsto x \oplus y$.

Ähnlich lässt sich auch die Addition auf $\mathbb{R}$ als Abbildung interpretieren (wobei hier allerdings die Zuordnungsvorschrift ohne Kenntnis der Addition nur schwer formulierbar ist):

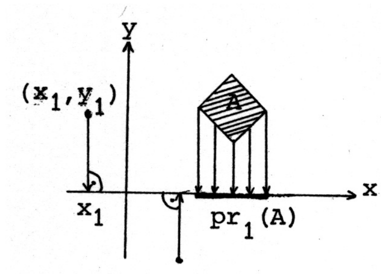
$$„+“\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad \mapsto x+y \ . \end{cases}$$

Auch die Multiplikation auf $\mathbb{R}$, die Addition von Vektoren,die Addition von Tripeln bzw. die diversen S-Multiplikationen „liefern“ Abbildungen.

(iv) Weitere wichtige Abbildungen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind die Projektionen

$$\mathrm{pr}_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad \mapsto x \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{pr}_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \quad \mapsto y \end{cases} .$$

Veranschaulichung in der Ebene:



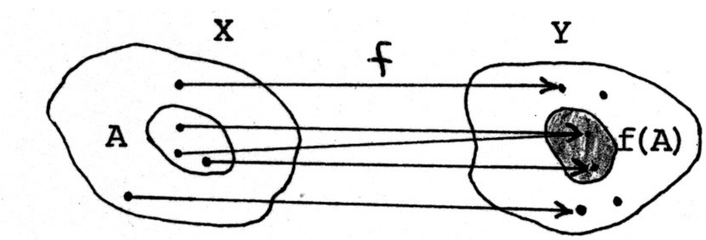
Figur 2.16: Zur Abbildung pr_1.

2.4.4 Definition: Bild, Urbild

Sei $f : X \to Y$ Abbildung !

(a) Für $A \subseteq X$ heißt die Menge $\boxed{f(A) := \{f(x) : x \in A\}}$ **Bild** von A unter f.

Diagramm:



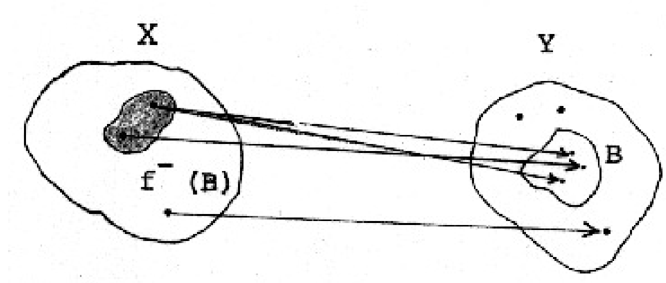
Figur 2.17: Bild $f(A)$ von A unter f.

Anmerkung. $A \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(X) \subseteq Y$.

Beispiel. pr_1 (s.o.!)

(b) Für $B \subseteq Y$ heißt, die Menge $\boxed{f^{-}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}}$ (volles) **Urbild** von B unter f. (Oft schreibt man auch $f^{-1}(B)$ statt $f^{-}(B)$.)

Diagramm:



Figur 2.18: (Volles) Urbild $f^{-}(B)$ von B unter f.

Anmerkung. (i) Urbilder einelementiger Teilmengen brauchen nicht einelementig zu sein:

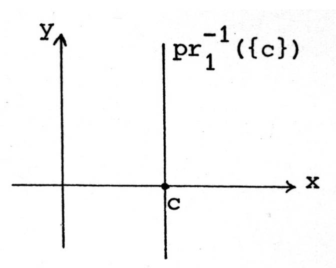
Beispiel (1).

$$\text{Für} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \qquad \text{ist} \quad f^{-}(\{b\}) = \begin{cases} \{\sqrt{b}, -\sqrt{b}\} & \text{für } b > 0 \\ \{0\} & \text{für } b = 0 \\ \emptyset & \text{für } b < 0\ . \end{cases}$$

Beispiel (2). $\mathrm{pr}_1^{-}(\{c\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$

Darstellung in der Ebene:

Figur 2.19: $\mathrm{pr}^{-}(\{c\})$



M ↓

(ii) Beim Aufsuchen des Urbildes von B im Diagramm verfolgt man die in B endenden Pfeile „rückwärts“. Demgemäß erinnert die Schreibweise $f^{-}(B)$ an die Umkehrrelation f^{-1} zu f. Bei den Bildungen von f^{-} ordnen wir jedoch Teilmengen von Y solche von X zu.

Wann ist mit f auch f^{-} Abbildung?

↑ M

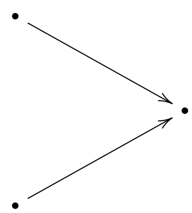
2.4.5 Definition:

Eine Abbildung $f: X \to Y$ (mit vorgegebenen Werte-Bereich Y) heißt

(i) **surjektiv** (rechtstotal), falls $f(X) = Y$ gilt;

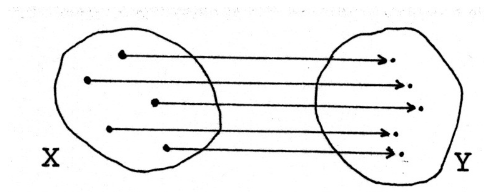
(ii) **injektiv** (linkseindeutig), falls gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$



Figur 2.20: bei injektiven Abbildungen ausgeschlossen

(iii) **bijektiv**, falls sie surjektiv und injektiv ist.



Figur 2.21: Pfeildiagramm einer bijektiven Abbildung

Also: $\boxed{f : X \to Y \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \forall y \in Y \exists 1\ x \in X : f(x) = y}$

Als Abbildung erfüllt f natürlich die Bedingung:

$$\forall x \in X\ \exists 1\ y \in Y : f(x) = y.$$

2.4.6 Folgerung für eine Abbildung f :

$$\boxed{f : X \to Y \text{ ist bijektiv.} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ ist Abbildung von } Y \text{ nach } X.}$$

(Dabei identifizieren wir die „Sigleton-Menge“ $\{x\}$ mit dem Element x und schreiben f^{-1} statt $f^{-}|_{Y \to X}$, sofern die Einschränkung möglich ist.
Also: Die Umkehrrelation einer bijektiven Abbildung (bij. Abb.) $f : X \to Y$, ist eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$.
Bezeichnung: f^{-1} heißt „die zu f **inverse Abbildung**“.
Eigenschaft: $[f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$ f.a. $x \in X, y \in Y$.

M ↓

Beispiele.

$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist weder surjektiv noch injektiv. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

$f_3 = f_1|_{\mathbb{R}_+} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist nicht surjektiv, aber injektiv.

$f_4 = f_2|_{\mathbb{R}_+} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist bijektiv; $f_4^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ y \quad \mapsto \sqrt{y}\ . \end{cases}$

Frage: Wie sehen die Graphen von f_1, f_2, f_3 und f_4 aus? ↑ M

M ↓

Häufig ist der Werte-Bereich einer Abbildung wichtiger als die Abbildung selbst. So lässt sich die Indizierung (bzw. Nummerierung) der Elemente einer Menge mit Hilfe des Abbildungs-Begriffes formalisieren. In solchen Fällen benutzt man eine veränderte Notation:

Beispiel. Durch die Abbildung

$$f : \begin{cases} \{1,2,3\} \to \{a,b\} \\ 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto a \end{cases}$$

ist eine „Reihenfolge" der (evtl. zu wiederholenden Elemente) von $Y = \{a, b\}$ festgelegt: Der Abbildung f entspricht das Tripel (a, b, a), ein Element aus Y^3. Umgekehrt lässt sich jedes Element von Y^3 als Abbildung $\{1, 2, 3\} \to Y$ auffassen. Verallgemeinerung:

2.4.7 Definition: Familie, Folge

(a) Seien I und Y Mengen und $f : I \to Y$ Abbildung. Statt $f(i)$ für $i \in I$ schreiben wir auch y_i und nennen die Abbildung f, also

$$f : \begin{cases} I \to Y \\ i \mapsto y_i \end{cases} \quad \textbf{Familie} \text{ von Elementen aus } Y \text{ mit } \textbf{Index-Menge } I.$$

Schreibweise: $f = (y_i)_{i \in I}$.

Anmerkung. Dabei muss man die Familie f unterscheiden von der Teilmenge von Y, deren Elemente als Werte von f auftreten, d.h. von der indizierten Menge $\{y_i : i \in I\}$. f braucht ja nicht injektiv zu sein, sodass Elemente von Y mehrfach als Bilder vorkommen können.

(b) Spezialfall: $I = \mathbb{N}$

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ heißt } \textbf{Folge} \text{ in } Y.$$

(Auch für $I = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ ist der Begriff der Folge verwendbar.)

Beispiel. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto y_n = \frac{1}{n} \end{cases}$.

(c) **Spezialfall:** $I = \{1, \ldots, n\}$.

$(y_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ (auch $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ geschrieben) heißt **endliche Folge** in Y.

Anmerkung. Eine solche Folge kann mit dem entsprechenden **n-Tupel** $(y_1, \ldots, y_n)$ oder dem entsprechenden **Wort** $y_1 \ldots y_n$ identifiziert werden.

Beispiel.

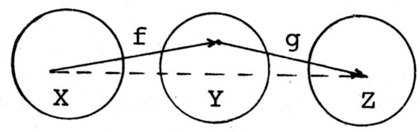
Das Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich als Folge $\{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} 1 \mapsto x \\ 2 \mapsto y \\ 3 \mapsto z \end{cases}$ auffassen.

2.5 Verknüpfung von Abbildungen

Im Folgenden betrachten wir die Verkettung von Abbildungen. Zur Motivation ziehen wir die Hintereinanderausführung geometrischer Bewegungen heran: zwei Drehungen um dasselbe Zentrum in der Ebene z.B. lassen sich, sieht man von den Zwischenzuständen ab, durch eine einzige Drehung ersetzen; die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen lässt sich durch eine Drehung bzw. Parallelverschiebung beschreiben.

2.5.1 Produkt (Komposition) von Abbildungen

Voraussetzung: Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. **Behauptung:** $x \mapsto g(f(x))$ ist Zuordnungsvorschrift einer Abbildung von X in Z. (Beweis: ?)



Figur 2.22: Zur Verknüpfung von Abbildungen

Definition: Diese Abbildung heißt das **Produkt** (Hintereinanderausführung, Verkettung, Verknüpfung, Komposition) der Abbildungen f und g, in Zeichen $g \circ f$.
Sprechweise: „ g nach f “

Also $$\boxed{g \circ f : \begin{cases} X \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}}$$

Anmerkung. 1) Für $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ z.B. ist $f \circ g$ zu unterscheiden von $f \cdot g$ (mit $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$).

2a) Man beachte das „Passen“ des Definitionsbereichs von g und des Werte-Bereichs von f.

2b) Eine analoge Definition ist auch für $g : Y' \to Z$ mit $Y \subseteq Y'$ möglich.

3) Oft schreibt man insbesondere in Geometrie und Algebra statt $f(x)$ auch x^f. Bei Benutzung dieser Schreibweise ist es sinnvoll die Faktoren eines Produktes in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben also $f \cdot g$ statt $g \circ f$.

4) Die Produkt-Bildung ist bei Abbildungen i.a. nicht **kommutativ**, d.h. falls $g \circ f$ und $f \circ g$ überhaupt erklärt sind, ist $f \circ g = g \circ f$ nicht allgemeingültig.

Beispiel (1). Seien g die Drehung in der Ebene um den Ursprung um 90° gegen den Uhrzeigersinn und f die Spiegelung an der x-Achse! Dann ist
$g \circ f$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten;
$f \circ g$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten.

Beispiel (2). $X = Y = Z := \{1, 2, 3\}$; für $f : \begin{cases} X \to X \\ i \mapsto 1 \end{cases}$ und $g : \begin{cases} X \to X \\ j \mapsto 2 \end{cases}$ gilt: $g \circ f = g \neq f = f \circ g$

Beispiel (3).
$X = Y = Z = \mathbb{R}$; für $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$ und $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^3 \end{cases}$ gilt: $(g \circ f)(x) = 3(x + 1)^3$ und $f(\circ g)(x) = 3x^3 + 1$ (für $x \in \mathbb{R}$).

5) Für jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt

$$\boxed{f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f}.$$

6) Sind $f : X \to Y$ Abbildung und $A \subseteq X$, dann ist

$$\boxed{f|_A = f \circ j_{A \to X}}.$$

2.5.2 Assoziativgesetz für Abbildungen

Seien X, Y, Z, W Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Abbildungen[12]. Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Proof. (i) Es gilt $(h \circ g) \circ f : X \to W$ und $h \circ (g \circ f) : X \to W$, also stimmen Definitions- und Werte-Bereich überein.

(ii) $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$.

□

Weitere Eigenschaften:

2.5.3 Hilfssatz.

(a) (f injektiv $\wedge$ g injektiv) $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

(b) (f surjektiv $\wedge$ g surjektiv) $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.

Umgekehrt gilt (c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv; und (d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.
Beweis. ...

2.5.4 Folgerung.

Voraussetzung: $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ Abbildungen

(a)

$$\boxed{(g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y) \Leftrightarrow (f \text{ Bijektion } \wedge g = f^{-1})}.$$

(b) Sind f und g Bijektionen, so ist $g \circ f$ Bijektion und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Beweis....

[12], also f, g, h Abbildungen mit „ passenden “ Definitions- und Wertebereichen.

2.6 Weiteres zu Durchschnitt und Vereinigung

Wir wollen die Durchschnitt- und Vereinigungsmengen-Bildung auf Familien von Mengen verallgemeinern.

2.6.1 Existenz der Vereinigungsmenge (Grundeigenschaft)

Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann heißt die Menge

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\}}$$

die **Vereinigung** der A_i. Ihre Existenz fordern wir als weitere Grundeigenschaft.

Speziell: $A_1 \cup A_2 := \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2\}$
(in Übereinstimmung mit der bereits definierten Vereinigung zweier Teilmengen einer Menge.)

Anmerkung. Fordert man zunächst nur die Existenz von $X \cup Y$ (für **beliebige** Mengen X und Y, so lässt sich die Existenz des kartesischen Produktes daraus und aus den anderen Grundeigenschaften herleiten, sodass dann auf die Grundeigenschaft (2.2.11) verzichtet werden kann.

2.6.2 Definition: Durchschnitt einer Familie von Mengen

Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen mit $I \neq \emptyset$. Dann heißt die Menge

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\}}$$

Durchschnitt der A_i. (Ihre Existenz folgt aus den Grundeigenschaften.)

Speziell: $A_1 \cap A_2 := \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2\}$ (in Übereinstimmung mit dem bereits definierten Durchschnitt zweier Teilmengen einer Menge).

2.6.3 Verhalten bzgl. Abbildungen

Voraussetzung: Seien X, Y Mengen, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $I \neq \emptyset$, bzw. $A, B \subseteq X$, sowie $f : X \to Y$ Abbildung !

Behauptung:	(a)	$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)}$
	(b)	$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
speziell:	(b')	$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$
	(c)	$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
speziell:	(c')	$\boxed{f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)}$

Beweis-Andeutung. Exemplarisch zeigen wir (c) (und damit auch (c')):

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) &\Rightarrow \exists x : (x \in \bigcap_{i \in I} A_i \wedge y = f(x)) \\ &\Rightarrow \exists x : (\forall i \in I : x \in A_i \wedge y = f(x)) \\ &\Rightarrow \forall i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x) \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i). \end{aligned}$$

□

Anmerkung. In (c) bzw. (c') gilt im Allgemeinen nicht das Gleichheitszeichen:
Beispiel. Für $A = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $B = \{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $f = \mathrm{pr}_1$ gilt:

$$\mathrm{pr}_1(A \cap B) = \mathrm{pr}_1(\emptyset) = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathrm{pr}_1(A) \cap \mathrm{pr}_1(B) = \{0\} \neq \emptyset\ .$$

Ist f Bijektion, so gilt das Gleichheitszeichen.

2.7 Zwei Beweis-Prinzipien

Im Folgenden behandeln wir zwei Beweis-Prinzipien, die von großer Wichtigkeit sind. Sie erlauben es, Beweise über unendlich viele Aussagen „endlich zu machen". M ↓

Wir beginnen zunächst mit dem Prinzip der vollständigen Induktion; es nutzt die Eigenschaften, die wir mit den natürlichen Zahlen verbinden (,und wird bei deren Definition meist verlangt): ↑ M

2.7.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform, deren Grundbereich $\mathbb{N}$ enthält. Gilt dann

(i) $A(1)$ ist wahr (Induktions-Verankerung, Induktions-Beginn)

(ii) $\forall m \in \mathbb{N} : (A(m) \Rightarrow A(m+1))$ (Induktions-Schritt, –Schluss)[13],

so ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Veranschaulichendes endliches Analogon: Domino-Kette
Anmerkung: Induktionsbeginn ist auch mit $A(0)$ möglich, falls dann $A(m) \Rightarrow A(m+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ gezeigt wird.
Zeigen Sie, dass auch $A(-k_0)$ mit $k_0 \in \mathbb{N}$ als (dann negativer) Induktionsbeginn dienen kann!
Eine weitere Variante ist der Beweis von $A(n)$ mit dem Induktionsbeginn $A(1)$ und dem Nachweis von $[\forall x \in \mathbb{N} \text{ mit } x \leq m : A(x)] \Longrightarrow A(m+1)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beispiel (1). $A(n): \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(i) Induktions-Verankerung $n = 1$: $\quad \sum_{i=1}^1 i^3 = 1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

[13]Hierbei heißt $A(m)$ die **Induktions-Voraussetzung** (Induktions-Annahme) und $A(m+1)$ die **Induktions-Behauptung**.

(ii) Induktions-Voraussetzung: $A(m)$

Induktions-Schritt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3 \\ &= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 && \text{laut Induktions-Voraussetzung} \\ &= \frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4} && = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2, \text{ d.h. } A(m+1).\end{aligned}$$

Beispiel (2). Seien $(M, \leq)$ total geordnete Menge und $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ (nicht-leere) endliche Teilmenge. Dann existiert genau ein **kleinstes Element** von X , d.h. ein $x \in X$ mit

$$x \leq x_i \text{ für } i = 1, \dots, n \, .$$

Proof. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig; sie sei richtig für $n = m$.
Sei $\{x_1, \dots, x_{m+1}\} \subseteq M$; dann existiert ein $j \in \{1, \dots, m\} : x_j \leq x_i$ für $i = 1, \dots, m$ (nach Induktions-Voraussetzung).
Da M total geordnet ist, gilt $x_{m+1} \leq x_j$ oder $x_{m+1} \geq x_j$, woraus die Existenz eines kleinsten Elementes für $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ folgt.
Beweis der Eindeutigkeit .... (ohne Induktion möglich). □

Das **zweite Beweis-Prinzip** ermöglicht Existenz-Beweise, wenn die zugrundeliegende Menge geordnet ist und das untersuchte Objekt durch „Maximalität“ charakterisiert ist. Den Wortlaut des Prinzips, das als **Lemma von Zorn** bekannt ist, geben wir weiter unten an. Zuvor vermerken wir, dass es nicht aus den bisher angeführten Grundeigenschaften hergeleitet werden kann, sodass wir seine Gültigkeit zusätzlich fordern, müssen. Oft wird auch statt des Zornschen Lemmas eine zu ihm **äquivalente** Aussage axiomatisch eingeführt, nämlich der
Wohlordnungssatz:
„Jede nicht-leere Menge lässt sich derart ordnen, dass jede nicht-leere Teilmenge T von M ein kleinstes Element besitzt, d.h. ein $x_0 \in T$ mit $x_0 \leq x$ für alle $x \in T$. “
oder das
Auswahlaxiom.
„Ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine nicht-leere Familie nicht-leerer paarweise disjunkter Mengen, dann existiert eine Abbildung $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ mit $f(\alpha) \in A_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$.“ (Die Abbildung f wählt aus jedem A_α ein Element aus).

Da keine Aussage über die Konstruktion von f gemacht werden kann, lehnen einige Mathematiker das Axiom und Folgerungen daraus ab.

2.7.2 Definition.

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann heißt

(i) $b \in M$ **obere Schranke**[14] von $N \subseteq M$, g.d.w.[15] $\forall a \in N : a \leq b$;

[14]Die obere Schranke von N muss also nicht zur Menge N selbst gehören
[15]genau dann, wenn

(ii) $b \in M$ **maximal** in M, g.d.w. $\forall a \in M : (a \geq b \Rightarrow a = b)$.

(Nicht unbedingt ist jedes Element $x \in M$ kleiner als ein maximales Element von M; denn x kann unvergleichbar mit b sein. Beispiel ? Dementsprechend kann „maximales[16] Element " und „größtes[17] Element " Verschiedenes bedeuten.

(Entsprechend wird „**untere Schranke**" und „**minimal**" definiert. Man beachte den (feinen, aber wesentlichen) Unterschied zwischen den Begriffen „ minimales Element" und „ kleinstes Element".)

Beispiele.

(i) Sei $(M, \leq) = (\mathbb{R}, \leq)$.

Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \sqrt{2}$ ist obere Schranke von $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$.

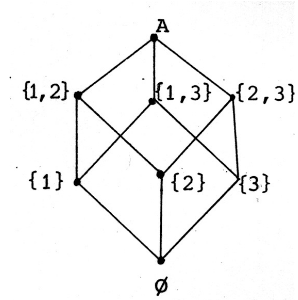
$\mathbb{R}$ besitzt keine maximalen Elemente.

(ii) Seien $(M, \leq) = (\wp(A), \subseteq)$, A Menge, $A \neq \emptyset$.

A ist maximales Element in $\wp(A)$ (bzgl. Inklusion),

$\emptyset$ ist minimales Element in $\wp(A)$ (bzgl. Inklusion).

Speziell: Für $A = \{1, 2, 3\}$ zeigt Figur 2.23 das Hasse-Diagramm (Pfeil-Diagramm ohne Schlingen, ohne Brücken, ohne Pfeilspitzen, Pfeile in aufsteigender Richtung) von $\wp(A)$. Ist $\mathcal{X} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, dann sind $\{1, 2\}$ und A obere Schranken von $\mathcal{X}$, und $\{1, 2\}$ ist maximales Element in $\mathcal{X}$.



Figur 2.23: Hasse-Diagramm zu $(\wp(A), \subseteq)$ für $A = \{1, 2, 3\}$.

2.7.3 Definition

Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt **induktiv geordnet**, wenn zu jeder nicht-leeren total-geordneten Teilmenge (**Kette**) von M eine obere Schranke in M existiert.

Beispiele.

(i) $(\wp(A), \subseteq)$ ist induktiv geordnet: Für ein nicht-leere Kette $\mathcal{X}$ von $\wp(A)$ ist $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ obere Schranke von $\mathcal{X}$.

(ii) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist nicht induktiv geordnet: $\mathbb{N}$ ist nicht-leere Kette ohne obere Schranke in $\mathbb{N}$.

(iii) $([0, 1,], \leq)$ ist induktiv geordnet, $([0, 1), \leq)$ nicht [18]

[16] es gibt kein größeres

[17] vergleichbar mit und größer als alle anderen Elemente

[18] Die Menge der Elemente einer monoton gegen 1 konvergierenden Folge von $[0, 1)$ z.B. besitzt keine obere Schranke in $[0, 1)$.

2.7.4 Zornsches Lemma

> In jeder nicht-leeren induktiv geordneten Menge existiert (mindestens) ein maximales Element.

Wir geben eine Anwendung des Zornschen Lemmas[19]:

2.7.5 Satz[20]

Seien X, Y nicht-leere Mengen. Dann gilt:

> (Es existiert eine injektive Abbildung g von X in Y.)$\vee$ (Es existiert eine injektive Abbildung h von Y in X.)

Proof. (i) Wir definieren $M := \{(A, f) : A \subseteq X \wedge f : A \to Y \text{ injektiv }\}$. M existiert (warum?). $M \neq \emptyset$, da für $x \in X, y \in Y$ und $f(x) := y$ das Paar $(\{x\}, f)$ aus M ist.

Weiter definieren wir auf M eine Relation „$\leq$" durch

$$(A, f) \leq (B, g) :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge g|_A = f.$$

(ii) Wir zeigen, dass $(M, \leq)$ induktiv geordnet ist: Es ist „$\leq$" Ordnungsrelation. Sei U eine nicht-leere total geordnete Teilmenge von M, indiziert durch Elemente von $I : U = \{(A_i, f_i) : i \in I\}$. Wir setzen $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ und definieren $f : A \to Y$ durch $f(x) = f_i(x)$ für $x \in A_i$. Wir müssen zeigen, dass f als Abbildung „wohldefiniert" ist, d.h. dass die durch $G_f = \{(x, y) | \exists i \in I : x \in A_i \wedge y = f_i(x)\}$ definierte Relation (G_f, a, Y) linkstotal und rechtseindeutig ist; die Linkstotalität folgt sofort, die Rechtseindeutigkeit folgendermaßen: seien $x \in A_i$ und $x \in A_k$; zu zeigen ist $f_i(x) = f_k(x)$; da U total geordnet ist, sind (A_i, f_i) und (A_k, f_k) vergleichbar; ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A) gelte $(A_i, f_i) \leq (A_k, f_k)$, also $A_i \subseteq A_k$ und $f_k|_{A_i} = f_i$. Damit ist $f : A \to Y$ Abbildung, und es gilt $f|_{A_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Wenn wir noch die Injektivität von f zeigen können, haben wir nachgewiesen, dass (A, f) obere Schranke von U ist. Seien also $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = f(x_2)$; dann existieren $i, j \in I$ mit $x_1 \in A_i, x_2 \in A_j$ und $f(x_1) = f(x_2)$; o.B.d.A. ist $A_i \subseteq A_j$ (da U total geordnet), also $x_1, x_2 \in A_j$; dann folgt $f_j(x_1) = f_j(x_2)$ und, weil f_j injektiv ist, $x_1 = x_2$.

(iii) $(M, \leq)$ ist also induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn existiert dann also ein maximales Element (B, g) in $(M, \leq)$. Wir wollen zeigen, dass $B = X$ oder $g(B) = Y$ gilt. *Annahme*: $B \neq X \wedge g(B) \neq Y$. Dann gibt es $x_0 \in X \setminus B$ und $y_0 \in Y \setminus g(B)$; die Abbildung $h : B \cup \{x_0\} \to Y$ mit $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in B \\ y_0 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$ ist injektiv. Damit ist $(B \cup \{x_0\}, h)$ eine Element von M, das echt größer ist als (B, g). Widerspruch zur Maximalität von (B, g).

Es gilt also $B = X$ oder $g(B) = Y$. Im ersten Fall ist $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung (und die Behauptung ist gezeigt), im zweiten Fall ist $g : B \to Y$ surjektiv und nach Konstruktion injektiv, also bijektiv; damit existiert $g^{-1} : Y \to B$; mit g^{-1} ist auch $j_{B \to X} \circ g^{-1} : Y \to X$ injektiv, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

[19] Diese zeigt uns in (2.8), dass von je zwei Mengen eine der beiden die gleiche oder eine kleinere „Mächtigkeit" als die andere hat.

[20] Falls Sie Schwierigkeiten beim Beweis dieses Satzes haben, die sich nicht sofort beseitigen lassen, so ist das nicht gravierend: Der Beweis ist recht formal und dient hier hauptsächlich als Beispiel zu (2.7.4).

2.8 Mächtigkeit einer Menge (Kardinalzahlen)

Für eine endliche Menge M können wir durch Abzählen der Elemente deren Anzahl n (zumindest theoretisch) feststellen. Das Abzählen entspricht dem „Herstellen" einer Bijektion von M auf $\{1, \ldots, n\}$. Jede andere Menge M' mit n Elementen lässt sich bijektiv auf $\{1, \ldots, n\}$ und damit auf M abbilden. Diese Tatsache nutzt man zur **Verallgemeinerung des Anzahl-Begriffs** auf unendliche Mengen. Man geht folgendermaßen vor:

2.8.1 Definition.

Seien A, B Mengen. Existiert dann eine Bijektion von A auf B, so heißen A und B **gleichmächtig**, in Zeichen $A \sim B$.

Beispiele

(i) $\{0, 1, 2, 3\} \sim \{0, 5, 10, 15\}$; denn

$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 5, \quad 2 \mapsto 10, \quad 3 \mapsto 15$ liefert eine Bijektion zwischen diesen Mengen.

(ii) Bezeichne $\mathbb{G}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen und $\mathbb{U}$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen! Es gilt:

$\mathbb{G} \sim \mathbb{U} \qquad$ (Eine mögliche Abbildungs-Vorschrift ist z.B. $x \mapsto x + 1$).

Satz (2.7.5) besagt dann, dass von zwei Mengen X und Y mindestens eine gleichmächtig zu einer Teilmenge der anderen ist.
Die Eigenschaft von Mengen, gleichmächtig zu sein, ist reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$) und transitiv ($(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$).

Auf jeder gegebenen Menge $\vec{M}$, deren Elemente selbst Mengen sind, (Mengen-System), ist die Gleichmächtigkeit daher eine Äquivalenzrelation und die Quotienten-Menge $\vec{M}/\sim$ besteht aus Klassen gleichmächtiger Mengen. Jedoch trifft man auf die Schwierigkeit, dass $\vec{M}$ evtl. nicht umfassend genug ist und die Menge aller Mengen nicht gebildet werden darf.
Eine Lösung dieses Problems bleibt der Vorlesung über Mengenlehre vorbehalten. Wir geben nur das Resultat wieder:

2.8.2

Jeder Menge A lässt sich eine **Mächtigkeit** (**Kardinalzahl**), die wir mit $\operatorname{card}(A)$, $\aleph(A)$ oder auch $|A|$ (Kardinalzahl von A) bezeichnen, derart zuordnen, dass gilt:

(i) $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$. (Also: Zwei Mengen haben genau dann die gleiche Mächtigkeit, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt.)

(ii) Eine Vergleichsmölichkeit für Kardinalzahlen lässt sich auf folgende Weise (wohl-) definieren:

$|A| \leq |B| :\Rightarrow (\exists C : C \subseteq B \wedge A \sim C)$. Man kann zeigen, dass gilt:

(a) $|A| \leq |A|$,

(b) $(|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|) \Rightarrow |A| = |B|$ (der Beweis ist nicht einfach) und

(c) $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$.

Aus Satz (2.7.5) folgt außerdem: $|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$.

Jede Menge von Kardinalzahlen ist damit total geordnet.

2.8.3 Definition

Sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$.

(a) M heißt **endlich**, falls gilt: $\exists n : M \sim \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\} =: \mathbb{N}_n$.

(b) M heißt **abzählbar unendlich**, falls $M \sim \mathbb{N}$.

(c) M heißt **überabzählbar**, falls M weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

Schreibweisen: (a) $|M| = n$.
(b) $|M| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (Aleph Null).
(c) $|M| > \aleph_0$.

Ferner $|\emptyset| := 0$.

M ↓

Anmerkung. Die Definition (2.8.3) benutzt die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und Teilmengen von ihr; will man zunächst ohne $\mathbb{N}$ auskommen (und $\mathbb{N}$ mengentheoretisch begründen), so benutzt man die Definition:
Eine Menge M heißt (Dedekind-) **unendlich**, wenn es eine echte Teilmenge U von M gibt mit $M \sim U$, anderenfalls endlich.
Diese und andere Eigenschaften unendlicher Mengen sind ungewohnt.

Beispiel. **Hilberts Hotel**, das Hotel mit unendlich vielen Zimmern.[21]
Ausgangssituation: Gast G_i ist in Zimmer i (für $i \in \mathbb{N}$); alle Zimmer sind belegt.

1. Fall: Herr Z kommt.
Dann zieht Gast G_i in Zimmer $i+1$ und Gast Z in Zimmer 1.

2. Fall: Unendlich viele Gäste $Z_1, Z_2, \ldots$ kommen.
Neue Belegung: Gast G_m zieht in Zimmer $2m$ und
Gast Z_{m+1} in Zimmer $2m+1$ – und alle Gäste sind untergebracht.

Frage: Erkennen Sie die Anwendung auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$?

↑ M

2.8.4 Satz.

(a) $\boxed{\mathbb{Z} \text{ ist abzählbar .}}$

Beweis-Andeutung. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade .} \end{cases}$ □

(b) $\boxed{\mathbb{Q} \text{ ist abzählbar .}}$

[21] s. u.a. Funkkolleg Mathematik, Bd. 1, Frankfurt/M., 1971, oder O.Deiser: Einführung in die Mengenlehre, Berlin etc. 2002, oder
URL: http://www.mathematik.de/fuenfminuten/
Ehrhard Behrends: 15. In Hilberts Hotel ist für einzelne Gäste immer ein Zimmer frei (Volle Hotels gibt es im Unendlichen nicht).

Beweis-Andeutung.

(i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (Abbildungs-Vorschrift $(m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$)

(ii) Jede Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist abzählbar unendlich oder endlich.

(iii) $\mathbb{Q}^+ \sim \varphi(\mathbb{Q}^+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}(\sim \mathbb{N})$, wobei

$$\varphi(x) : \begin{cases} \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \frac{p}{q} \mapsto (p, q) \quad , p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

$\square$

Zusammenfassung:

$$\boxed{|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| =: \aleph_0}.$$

(c) $\boxed{\mathbb{R} \text{ ist überabzählbar.}}$

Beweis-Andeutung. (2. Cantorsches Diagonal-Verfahren)

(i) $\mathbb{R} \sim J = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ (Intervall $(0, 1)$)

Beweis-Andeutung. $f : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x-1}{1-|2x-1|} \end{cases}$ ist Bijektion.

(ebenso $g : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-\frac{1}{2}}{x(x-1)} \end{cases}$ mit Umkehrfunktion $y \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+|y|} + 1\right)$). $\square$

(ii) Annahme: J ist abzählbar; dann existiert eine Bijektion $\mathbb{N} \to J$; sei diese gegeben durch [22]

$$\begin{array}{lll} 1 & \mapsto & 0,\boxed{z_{1\,1}}\; z_{1\,2}\; z_{1\,3}\; \ldots \\ 2 & \mapsto & 0,z_{2\,1}\; \boxed{z_{2\,2}}\; z_{2\,3}\; \ldots \\ 3 & \mapsto & 0,z_{3\,1}\; z_{3\,2}\; \boxed{z_{3\,3}}\; \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

Die Zahl $r = 0, z'_{1\,1} z'_{2\,2} \ldots$ mit $z'_{i\,i} := \begin{cases} z_{i\,i} + 1 & \text{für } z_{i\,i} < 8 \\ z_{i\,i} - 1 & \text{für } z_{i\,i} = 8 \text{ oder } z_{i\,i} = 9 \end{cases}$

ist nicht aufgeführt, aber in J, ein Widerspruch!

$\square$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\mathbb{R} =: \vec{c} \neq \aleph_0.}$$

[22] Hierbei seien die Elemente von J als Dezimalbrüche dargestellt und (zum Zwecke der Eindeutigkeit dieser Darstellung) $\ldots a\bar{9}$ als $\ldots (a+1)\bar{0}$ geschrieben.

2.8.5 Anmerkungen

(i) Man kann sich nun fragen, ob es eine Kardinalzahl gibt, die echt zwischen $\aleph_0$ und $\vec{c}$ liegt. Die sogenannte **Kontinuumshypothese** beinhaltet die Annahme, dass keine solche Kardinalzahl existiert; die verallgemeinerte Kontinuumshypothese geht davon aus, dass es keine weitere Kardinalzahl zwischen $|M|$ und $|\wp(M)| = |2^M|$ gibt.Nach Gödel und Cohen sind sowohl die (verallgemeinerte) Kontinuumshypothese als auch deren Negation zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel + Auswahlaxiom) widerspruchsfrei, also auch nicht aus diesen beweisbar. (Siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese)

(ii) Definiert man Summe und Produkt zweier Kardinalzahlen geeignet, (die Summe als die Mächtigkeit der Vereinigung von disjunkten Repräsentanten und das Produkt als Mächtigkeit des kartesischen Produkts zweier Repräsentanten), so lässt sich eine **Kardinalzahl-Arithmetik** entwickeln; z.B. gilt $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ (vgl. Hilberts Hotel !) und Folgendes:
Ist $(A_\mu)_{\mu \in I}$ eine Familie von Mengen mit $|A_\mu| \leq \aleph_0$ für alle $\mu \in I$; dann folgt

$$|\bigcup_{\mu \in I} A_\mu| \leq \sum_{\mu \in I} |A_\mu| \leq |I| \cdot \aleph_0 = \max(|I|, \aleph_0).$$

(Diese Tatsache werden wir in Satz 8.4 anwenden.)

Literatur-Hinweise zu (2.8).

Deiser, Oliver: Einführung in die Mengenlehre. 19.9.2018
http://www.aleph1.info/?call=Puc& permalink=mengenlehre1
Deiser, Oliver: Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo. Springer. Berlin 2002.

Kaplansky, Irwing: Set theory and metric spaces.Nachdruck AMS 2008:
Ausführliche Leseprobe im Netz.

Gebraucht erwerbbar:
dtv-Atlas zur Math., Bd. 1, München 1974, p.34/35
Dugundji, J.: Topology, Boston, Kap. I&II
Fischer-Lexikon Math. 1, Frankfurt/M. 1964 p. 166 ff

oder(andere) Bücher über Mengenlehre.