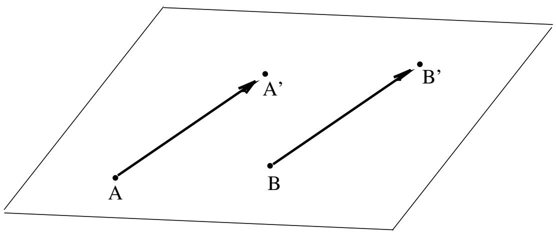
Kapitel I: Einleitung

1 Modelle von Vektorräumen

In diesem (der Motivation dienenden) Paragraphen behandeln wir Beispiele zur algebraischen Struktur 'Vektorraum'. Einige Begriffe und Gegebenheiten setzen wir dabei als bekannt voraus. Eine Präzisierung erfolgt später, wenn wir uns um eine mathematisch strenge Darstellung bemühen.

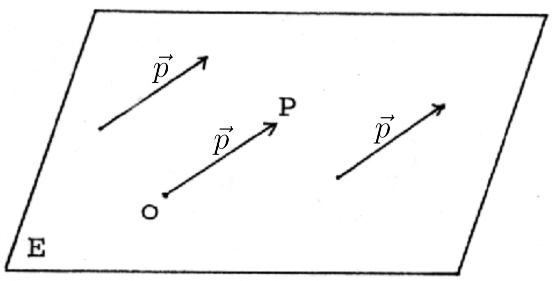
1.1 Vektoren der (Zeichen-) Ebene

(a) Was verstehen wir unter einem Vektor der Zeichenebene?
Wir betrachten eine 'Parallelverschiebung' (Translation) der 'Zeichenebene' E. Verbinden wir Urbild- und Bildpunkte (z.B. A und A', B und B', etc.) durch Pfeile,



Figur 1.1: Vektorgleiche Pfeile der Zeichenebene

so haben diese Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, ... die gleiche 'Länge' und (im Falle $A \neq A'$) die gleiche 'Richtung' (d.h. sie, sind parallel) und die gleiche 'Orientierung'; wir sagen: sie sind **vektorgleich**.
Die Menge $\vec{a}$ (zum Begriff 'Menge's.u. §2) aller zu $\overrightarrow{AA'}$ vektorgleichen Pfeile in E heißt **(freier) Vektor** der Zeichenebene. Ein Vektor in diesem Sinne ist also eine Menge von Pfeilen. Jeder der Pfeile von $\vec{a}$ (also u.a. $\overrightarrow{AA'}$) wird **Repräsentant** von $\vec{a}$ genannt; die Länge der Strecke $\overrightarrow{AA'}$ heißt **Länge** $|\vec{a}|$ von $\vec{a}$. Mit jedem Vektor $\vec{a}$ ist eine Parallelverschiebung $v_{\vec{a}}$ verbunden und umgekehrt.
Sei nun ein fester Punkt O (**Ursprung**) in E ausgewählt. Jetzt bestimmt jeder Punkt P einen Pfeil $\overrightarrow{OP}$; der dadurch repräsentierte Vektor $\vec{p}$ heißt **Ortsvektor** des Punktes P.



Figur 1.2: Ortsvektor und freier Vektor

Umgekehrt ist jeder Vektor $\vec{p}$ von E Ortsvektor eines Punktes (nämlich des Endpunktes des Repräsentanten von $\vec{p}$ mit Anfangspunkt O).

Bei festem O haben wir eine eindeutige Zuordnung zwischen

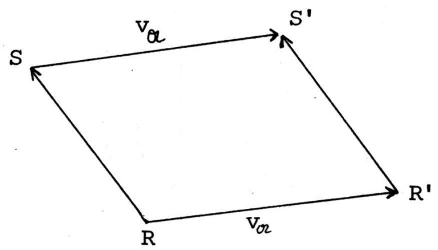
(i) dem Punkt P,

(ii) der Parallelverschiebung $v_{\vec{p}}$, die O in P überführt,

(iii') dem Pfeil $\vec{OP}$,

(iii) dem durch $\overrightarrow{OP}$ bestimmten Vektor $\vec{p}$.

Anmerkung. Eine Parallelverschiebung führt einen beliebigen Pfeil (z.B. $\overrightarrow{RS}$) in einen vektorgleichen Bildpfeil ($\overrightarrow{R'S'}$)**Vektoren bleiben also invariant unter Parallelverschiebungen**. (Umgekehrt gibt es zu zwei vektorgleichen Pfeilen eine Parallelverschiebung, die den einen Pfeil in den anderen überführt.) (Beweis mit den Eigenschaften der Parallelverschiebungen.)



Figur 1.3: Pfeile unter Parallelverschiebung [1]

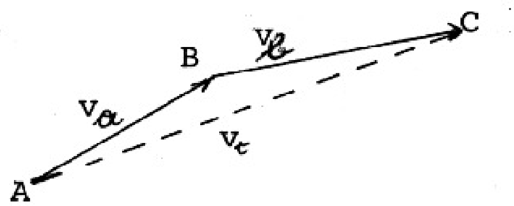
(b) Addition

Zunächst zeigen wir folgende

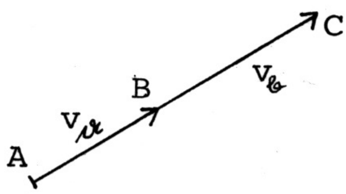
Bemerkung. Die Hintereinanderausführung zweier Parallelverschiebungen ergibt wieder eine Parallelverschiebung.

Um dies einzusehen, tragen wir in einem Punkt A den zur ersten Parallelverschiebung gehörenden Vektor $\vec{a}$ ab; den Endpunkt des Repräsentanten nennen wir B; in B tragen wir den zur zweiten Parallelverschiebung gehörenden Vektor $\vec{b}$ ab. Der Endpunkt dieses Pfeils sei C. (Wir definieren $\overrightarrow{AC} =: \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; der Endpunkt des 1. Pfeils muss gleich dem Anfangspunkt des 2. Pfeils sein.) Nun ist C das Bild von A bei Hintereinanderausführung beider Parallelverschiebungen. Der Pfeil $\overrightarrow{AC}$ definiert eine Parallelverschiebung $v_{\vec{c}}$.

[1] In den Figuren sind für Vektoren oft noch Frakturbuchstaben verwandt, also z.B. $\mathfrak{a}$ statt $\vec{a}$.

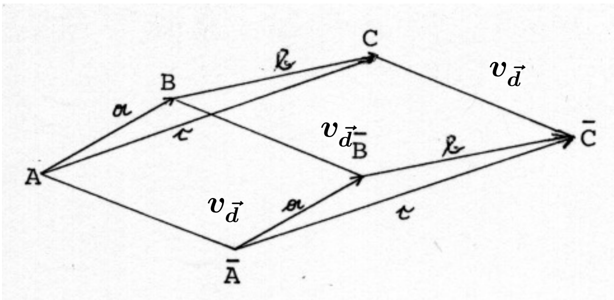


bzw.



Figur 1.4: Hintereinanderausführung von Parallelverschiebungen

Wir müssen zeigen, dass $v_{\vec{c}}$ (bzw. der zugehörige Vektor $\vec{c}$) nicht vom Punkt A abhängt. Ist $\bar{A}$ nun irgend ein weiterer Punkt von E, so betrachten wir die zum Pfeil $\overrightarrow{A\bar{A}}$ des Vektors $\vec{d}$ gehörende Parallelverschiebung $v_{\vec{d}}$; sie führe die Punkte A, B, C in $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ über, s. Figur 1.5. Da Pfeile auf vektorgleiche Pfeile abgebildet werden, ist $\bar{C}$ der Bildpunkt von $\bar{A}$ bei Hintereinanderausführung von $v_{\vec{a}}$ und $v_{\vec{b}}$.

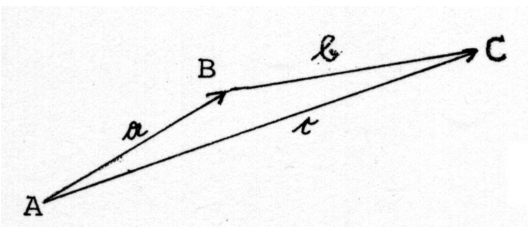


Figur 1.5: Unabhängigkeit der Addition von den Repräsentanten

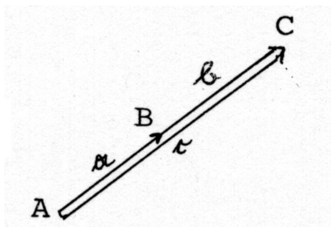
Andererseits sind aber auch $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{\bar{A}\bar{C}}$ vektorgleich. Jeder Bildpunkt entsteht also durch Abtragen des zu $\vec{c}$ gehörenden Repräsentanten, damit einheitlich durch die Parallelverschiebung, $v_{\vec{c}}$.
Aufgrund dieser Überlegungen und in Übereinstimmung mit den Erfordernissen einer Addition von Vektoren in der Physik (z.B. „Kräfteparallelogramm“ s.u.) definieren wir die Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{mit Hilfe der Repräsentanten} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

Hierbei ist A beliebiger Punkt von E und $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ seien Repräsentanten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$. Es ist wichtig, dass der Endpunkt (Spitze) des Repräsentanten von $\vec{a}$ mit dem Anfangspunkt (Fuß) des Repräsentanten von $\vec{b}$ übereinstimmt, sodass ein „Pfeilzug“ entsteht (**Spitze–Fuß–Regel**).



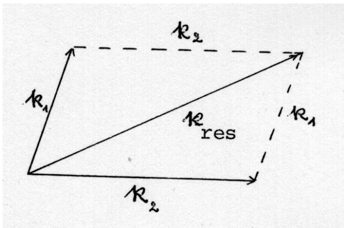
bzw.



Figur 1.6: Zur Addition von Vektoren

Diese Definition der Summe zweier Vektoren ist sinnvoll, da $\vec{c}$ dabei nicht von A abhängt. Gehen wir von den Vektoren zu den zugehörigen Parallelverschiebungen über! Wir haben gesehen, dass die Hintereinanderausrührung von $v_{\vec{a}}$ und $v_{\vec{b}}$ wieder eine Parallelverschiebung ist; deren eindeutig zugeordneter Vektor $\vec{c}$ hat u.a. den Repräsentanten $\overrightarrow{AC}$, ist aber nicht von A abhängig (s.o.), sondern nur von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Anmerkung. Zwei in einem Punkt angreifende Kräfte addieren sich vektoriell (Kräfteparallelogramm):

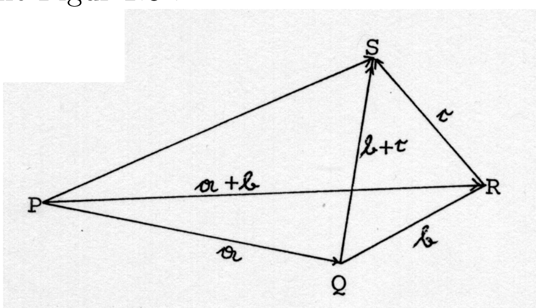


Figur 1.7: Kräfteparallelogramm: $\vec{k_{\text{res}}} = \vec{k_1} + \vec{k_2}$

Rechengesetze:

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(Assoziativgesetz)}}$$

Beweisskizze: Siehe Figur 1.8 !

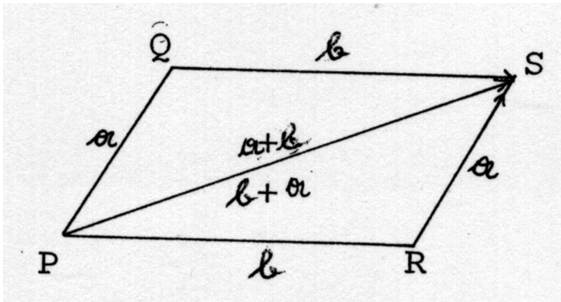


Figur 1.8: Zum Assoziativgesetz □

Gegenbeispiel aus der Umgangssprache: Fach(Werkstadt) ist nicht gleich (Fachwerk)Stadt.

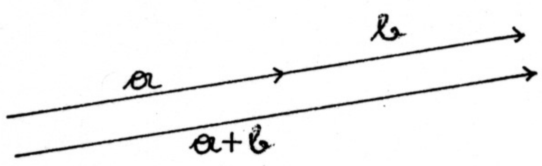
$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(Kommutativgesetz)}}$$

Beweisskizze:
1. Fall: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben verschiedene Richtung



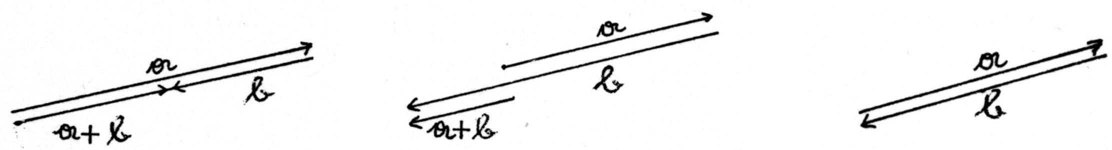
Figur 1.9 : Zum Kommutativgesetz

($\overrightarrow{RS}$ ist Repräsentant von $\vec{a}$, da $\overrightarrow{PQ}$ durch $v_{\vec{b}}$ in einen vektorgleichen Pfeil übergeht)
2. Fall: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben gleiche Richtung. Diese Betrachtung überlassen wir dem Leser; als Hinweis diskutieren wir jedoch die verschieden Möglichkeiten für $\vec{a}+\vec{b}$.
Haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleich Richtung ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), hat auch $\vec{a}+\vec{b}$ diese Richtung. p Haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusätzlich die gleiche Orientierung, so auch $\vec{a}+\vec{b}$; der Summenvektor hat dann die Länge $|\vec{a}|+|\vec{b}|$.



Figur 1.10 a: Zur Orientierung des Summenvektors

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegensätzlich orientiert, so hat im Fall $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ (bzw. $|\vec{b}| > |\vec{a}|$) die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ und die Orientierung von $\vec{a}$ (bzw. $\vec{b}$) und die Länge $|\vec{a}|-|\vec{b}|$ (bzw. $|\vec{b}|-|\vec{a}|$).



für $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ für $|\vec{b}| > |\vec{a}|$ für $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Figur 1.10 b,c,d: Zum Summenvektor – Beispiele für die weiteren Fälle

Es verbleibt der Fall, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel und gleich lang sind, aber gegensätzlich orientiert. (Anwendungsbeispiel: gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte). Es ist üblich, dann $-\vec{a}$ für $\vec{b}$ zu schreiben.

Ist $\overrightarrow{AB}$ Repräsentant von $\vec{a}$, so repräsentiert $\overrightarrow{BA}$ den Vektor $-\vec{a}$.

Die Summe $\vec{a}+(-\vec{a})$ wird repräsentiert durch die „Pfeile“ der Form $\overrightarrow{AA}$ $(= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})$, die wir ebenfalls vektorgleich nennen. Der Vektor, den sie bestimmen, heißt **Nullvektor** $\vec{o}$; er hat Länge 0 und undefinierte Richtung.

Eine (hier nicht beantwortete) Frage : Wie sieht die „Parallelverschiebung“ $v_{\vec{o}}$ aus, wie $v_{(-\vec{a})}$?

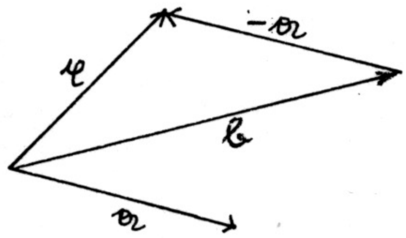
Wir halten fest: $\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}}$

Haben $-\vec{a}$ und $\vec{o}$ die Eigenschaften, die man aufgrund der Ähnlichkeit zur Bezeichnungsweise bei Zahlen erwartet? Tatsächlich gilt:

$$\boxed{\vec{c} + \vec{o} = \vec{c}} \qquad \text{für jeden Vektor } \vec{c} \text{ in } E\,;$$

$$\text{und } \boxed{\text{aus } \vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \text{ folgt } \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}};$$

denn aus $\vec{x}+\vec{a} = \vec{b}$ folgt durch Addition von $-\vec{a}$ die Gleichung $(\vec{x}+\vec{a})+(-\vec{a}) = \vec{b}+(-\vec{a})$; mit der *Abkürzung* $\vec{b}-\vec{a} = \vec{b}+(-\vec{a})$ und wegen $(\vec{x}+\vec{a})+(-\vec{a}) = \vec{x}+(\vec{a}+(-\vec{a})) = \vec{x}+\vec{o} = \vec{x}$ sieht man, dass höchstens diese Lösung möglich ist. Umgekehrt ist $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ tatsächlich Lösung, was man durch Einsetzen verifiziert. So lassen sich also solche Gleichungen lösen.(Vgl. Figur 1.11 !)



Figur 1.11: Zur Lösung der Gleichung $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$

(c) S-Multiplikation (Multiplikation mit Skalaren)

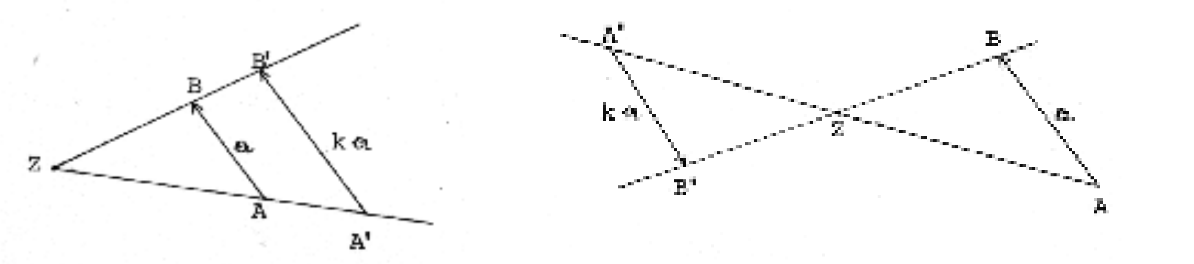
Eine zentrische Streckung mit dem (reellen, von 0 verschiedenen) Streckfaktor k und dem Zentrum Z bildet jeden Pfeil $\overrightarrow{AB}$ auf einen zu $\overrightarrow{AB}$ parallelen Pfeil $\overrightarrow{A'B'}$ der $|k|$-fachen Länge und der im Falle

$$\left\{\begin{matrix} k > 0 & \text{gleichen} \\ k < 0 & \text{entgegengesetzten} \end{matrix}\right\}$$

Orientierung ab.

(Zum Zusammenhang mit den **Strahlensätzen** s. Figur 1.12 !).

Ein Vektor wird also bei zentrischen Streckungen wieder auf einen (meist vom ursprünglichen verschiedenen) Vektor abgebildet.

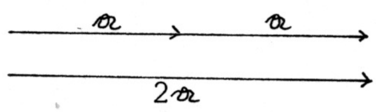


$k > 0$ $\qquad\qquad$ $k < 0$

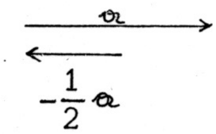
Figur 1.12: Pfeile unter zentrischen Streckungen mit Streckfaktor k : Es gilt ($\overrightarrow{ZA'} = k\overrightarrow{ZA}$).

Mit $\boxed{k\vec{a}}$ bezeichnen wir den Vektor, der gleiche Richtung wie $\vec{a}$ hat, $|k|$-fache Länge und (für $k > 0$) gleiche bzw. (für $k < 0$) entgegengesetzte Orientierung; insbesondere ist $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Beispiele: $1\vec{a} = \vec{a}$; $\qquad -\vec{a} = (-1)\vec{a}$



Figur 1.13 a: Beispiel zur S-Multiplikation: $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$

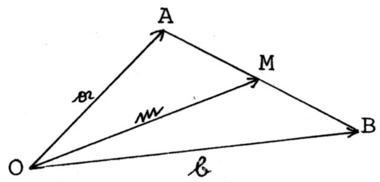


Figur 1.13 b: Beispiel zur S-Multiplikation: $(-\frac{1}{2})\vec{a} = -(\frac{1}{2}\vec{a})$

Für $k = 0$ definieren wir: $0\vec{a} = \vec{o}$ für alle Vektoren $\vec{a}$ von E.

(Geometrische) Anwendung: **Bestimmung des Mittelpunktes einer Strecke**.

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Ortsvektoren (bzgl. des Ursprungs O) der Endpunkte A und B der gegebenen Strecke! Wie lässt sich dann der Ortsvektor $\vec{m}$ des Mittelpunktes M von AB angeben?



Figur 1.14 Mittelpunkt einer Strecke

$\overrightarrow{AB}$ ist Repräsentant von $\vec{b} - \vec{a}$ (nach der Spitze-Fuß-Regel)

$\overrightarrow{AM}$ ist Repräsentant von $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ (nach Definition von Mittelpunkt und S-Multiplikation)

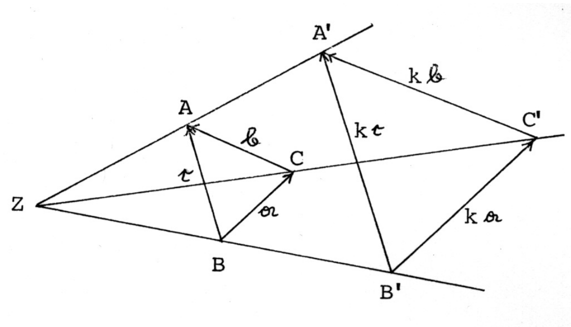
$\overrightarrow{OM}$ also Repäsentant von $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Also $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$.

Dabei haben wir mit Vektoren gerechnet, wie wir es von den reellen Zahlen gewohnt sind. Gerechtfertigt wird unser Vorgehen hier durch den Nachweis der Gültigkeit folgender **Rechenregeln:**

$$\boxed{k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}} \qquad \text{(Distributivgesetz 1. Art)}$$

Beweis:

Sind $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ Repräsentanten von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$, und ist $\overrightarrow{BA}$ Pfeil von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, so gilt für deren Bilder unter einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k: $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{B'A'}$ sind Repräsentanten von $k\vec{a}$, $k\vec{b}$ bzw. $k\vec{c}$, und es ist $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b}$. □



Figur 1.15 Zur S-Multiplikation

$$\boxed{k_1(k_2\vec{a}) = (k_1 \cdot k_2)\vec{a}} \qquad \text{(gemischtes Assoziativgesetz)}$$

(Unmittelbar aus der Definition einzusehen).

$$\boxed{(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Addition}\\ \text{reeller Zahlen}}}{k_1 + k_2})\vec{a} = k_1\vec{a} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Addition}\\ \text{von Vektoren}}}{+} k_2\vec{a}} \qquad \text{(Distributivgesetz 2. Art)}$$

Beweis – Andeutung.
$(k_1 + k_2)\vec{a}$ und $k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$ haben beide die gleiche Orientierung (warum?) und die Länge $|k_1 + k_2| \cdot |\vec{a}|$
(Fallunterscheidungen nach den Vorzeichen von k_1 und k_2). □

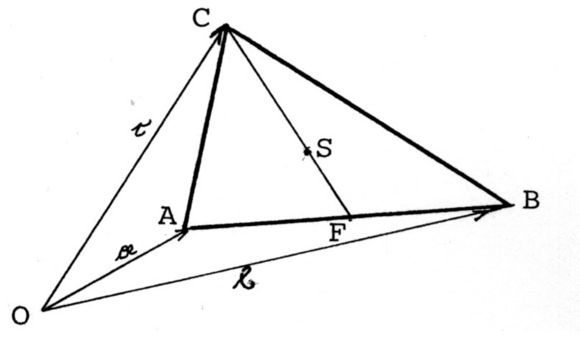
Weitere geometrische Anwendungen:

(i) Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks.

Wir wissen, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich im Verhältnis 2 : 1 teilen. Wir wollen diesen Sachverhalt vektoriell herleiten. Das Dreieck sei gegeben durch die Punkte A, B, C mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$. Es sei F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit Endpunkten A und B. Wir suchen den Ortsvektor $\vec{s}$ des Punktes S, der die Strecke $\overline{CF}$ im Verhältnis 2 : 1 teilt.

$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ (s.o.)
$\vec{s} = \vec{f} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{f}) = \vec{f} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{f} = \frac{2}{3}\vec{f} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Da das Ergebnis symmetrisch in $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ist, erhalten wir $\vec{s}$ auch als Ortsvektor der Punkte, die die anderen Seitenhalbierenden im Verhältngs 2 : 1 teilen; diese Punkte fallen also zusammen; S ist der Schnittpunkt aller drei Seitenhalbierenden.



Figur 1.16: Zum Seitenhalbierenden-Schnittpunkt

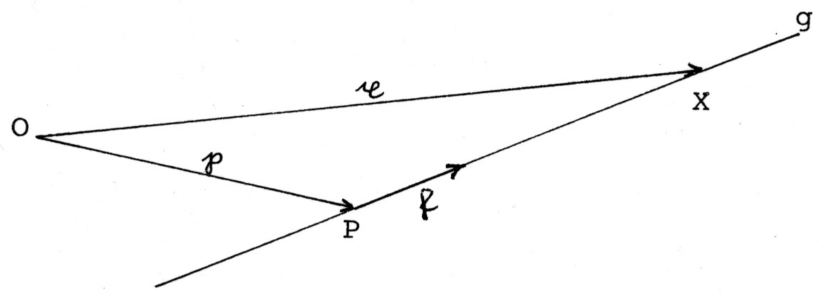
(ii) Geradengleichungen

Ist von einer Geraden g ein Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und die Richtung durch einen Vektor $\vec{f}$ in Richtung g bekannt, dann hat jeder Punkt X von g einen Ortsvektor $\vec{x}$ der

Form

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + k\vec{f}} \qquad \text{(vektorielle Punktrichtungsgleichung).}$$

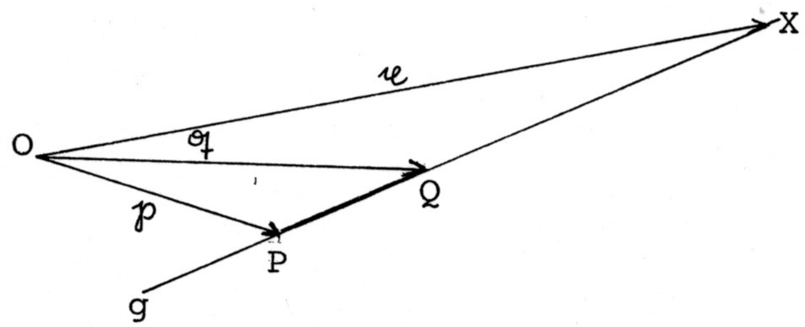
Umgekehrt liegt jeder solche Punkt auf g.



Figur 1.17: Zur Punkt-Richtungs-Gleichung einer Geraden

(Beim Beweis wird benutzt, dass parallele Vektoren skalare Vielfache von einander sind). Sind von g zwei Punkte P, Q mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ gegeben, so folgt mit $\vec{f} = \vec{q} - \vec{p}$

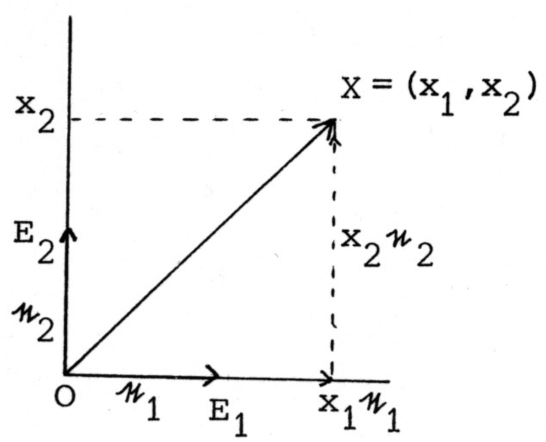
$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + k(\vec{q} - \vec{p})} \qquad \text{(vektorielle Zweipunktegleichung).}$$



Figur 1.18: Zur Zweipunktegleichung einer Geraden

(d) Komponentendarstellung

Von der Schule her sind wir gewohnt, Punkte durch Koordinatentupel darzustellen. Bis jetzt haben wir uns um eine koordinatenfreie Darstellung bemüht. Nun wollen wir die Verbindung zwischen dem (Orts-) Vektor und den Koordinaten eines Punktes herstellen. Dazu wählen wir in E ein **'kartesisches Koordinatensystem'** aus, also insbesondere Punkte O, E_1, E_2 derart, dass gilt: $|\overline{OE_1}| = 1 = |\overline{OE_2}|$ (Strecken der Länge 1) und $OE_1 \perp OE_2$ (Geraden, die aufeinander senkrecht stehen).



Nun seien $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ Ortsvektoren von E_1 bzw. E_2.
Der Punkt X mit den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) hat dann den Ortsvektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ (**Komponentendarstellung**), wofür wir auch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ schreiben. (Siehe Figur 1.19 !)

Figur 1.19: Kartesische Koordinaten

Wir haben also folgende Entsprechung: $\boxed{X = (x_1, x_2) \longleftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}}$.

Addition in Komponentendarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) + (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2) = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$$

S-Multiplikation in Komponentendarstellung:

$$k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} = k(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = (kx_1)\vec{e}_1 + (kx_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} .$$

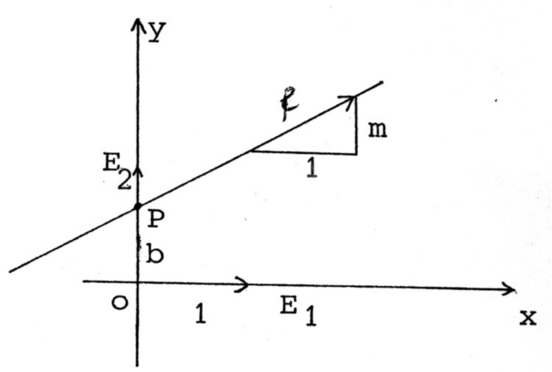
(Schreiben Sie die beiden Rechnungen ausführlicher hin! Welche Rechengesetze wurden benutzt?)

Beispiel.
Sei g Gerade mit Achsenabschnitt b und Steigung $m \neq \infty$. Es geht dann g durch den Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ und hat $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ als Richtungsvektor $\vec{f}$. Die (vektorielle) Punktrichtungsgleichung $\vec{x} = \vec{p} + k\vec{f}$ wird zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} + k\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} = \begin{pmatrix} k \\ b + km \end{pmatrix}$$

woraus $x = k$ und $y = b + km$, also die gewohnte Gleichung für den einen der beiden Geradentypen

$\boxed{y = mx + b}$ folgt.

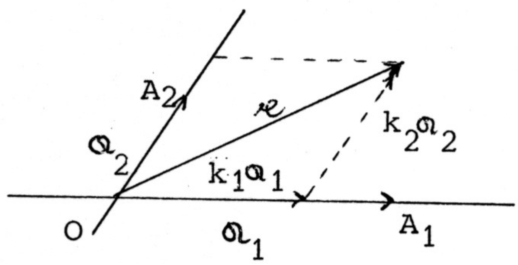


Figur 1.20: Zur Geradengleichung

Anmerkung. Wir haben uns eben eines kartesischen Koordinatensystems bedient. Will man den Begriff des Senkrechtstehens noch vermeiden, so lassen sich ähnliche Betrachtungen auch für ein (sogenanntes affines) Koordinatensystem $(O; A_1, A_2)$ bzw. für $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ statt $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ anstellen, wobei von den Punkten O, A_1, A_2 nur gefordert wird, dass sie nicht auf einer Geraden liegen, bzw. von $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, dass sie nicht parallel sind; s. Figur 1.21 ! Auch dann lässt sich jeder Vektor (eindeutig) in der Form

$$\vec{x} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}_{\vec{a}_1,\vec{a}_2}$$

als **Linearkombination** von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ schreiben.
Wir sagen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ spannen die Ebene E auf. Die Bedingung „$\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind nicht parallel“ bedeutet, dass keine Beziehung der Form $\vec{a}_1 = k\vec{a}_2$ oder $\vec{a}_2 = k\vec{a}_1$ bestehen darf. Fassen wir die beiden letzten Gleichungen zusammen, dann fordern wir für $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, dass die Gleichung



Figur 1.21: Affine Koordinaten eines Vektors

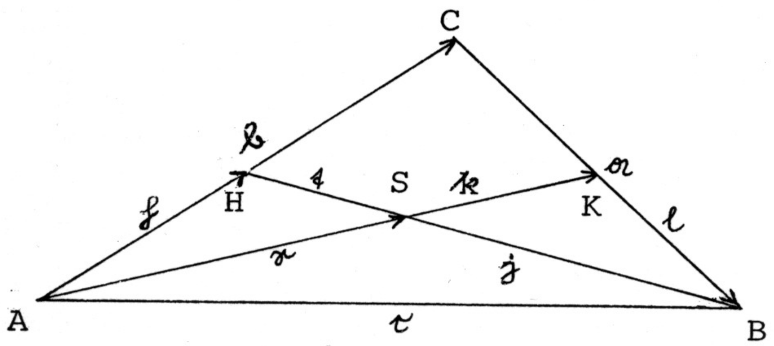
$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{o}$$

nur die Lösung $x_1 = 0 = x_2$ hat. In diesem Fall nennen wir $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ **linear unabhängig**.
Insbesondere sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ linear unabhängig.

(e) Anhang: Koordinatenfreie Beweise geometrischer Sätze mit Hilfe der Vektorrechnung

Wir gehen hier kurz auf Beweisverfahren für Figuren ein, die sich durch Zeichnen von Geraden, Strecken, Parallelen und Teilen von Strecken konstruieren lassen. Als Beispiel wählen wir nochmals den Satz über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks, ohne jedoch das Teilverhältnis als bekannt vorauszusetzen.

(i) In den Figuren auftretende Strecken werden mit einer geeigneten Orientierung versehen, sodass zu Vektoren übergegangen werden kann. (S.z.B. Figur 1.22 !)



Figur 1.22: Zuordnung von Vektoren

Beispiel.

$\vec{s}$	sei	repräsentiert	durch	$\overrightarrow{AS}$	$\vec{t}$	sei repräsentiert .		durch	$\overrightarrow{HS}$
$\vec{k}$	"	"	"	$\overrightarrow{AK}$	$\vec{l}$	"		"	$\overrightarrow{KB}$
$\vec{h}$	"	"	"	$\overrightarrow{AH}$	$\vec{j}$	"		"	$\overrightarrow{HB}$
$\vec{a}$	"	"	"	$\overrightarrow{CB}$	$\vec{b}$	"		"	$\overrightarrow{AC}$
$\vec{c}$	"	"	"	$\overrightarrow{AB}$					

(ii) Zwei geeignete linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ werden ausgewählt. (Im Beispiel ist dies schon geschehen, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.) Jeder Vektor der Ebene lässt sich dann als Linearkombination dieser Vektoren schreiben, zunächst meist nur mit uns unbekannten Koeffizienten.

(iii) Die Voraussetzungen sowie konstruktionsbedingten Beziehungen werden als Gleichungen geschrieben.

Beispiel.
$\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{l} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{s} = x\vec{k}$, $\vec{t} = y\vec{j}$ (mit noch zu bestimmenden Zahlen x, y).

(iv) Geeignete geschlossene Pfeilzüge werden durch Gleichungen ausgedrückt.

Beispiel.
$\vec{s} = \vec{h} + \vec{t}$, $\vec{h} + \vec{j} = \vec{c}$, $\vec{k} + \vec{l} = \vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

(v) Die Gleichungen werden auf Beziehungen zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ reduziert.

Beispiel.
$\vec{s} = \vec{h} + \vec{t} = \frac{1}{2}\vec{b} + y\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{b} + y(\vec{c} - \vec{h}) = \frac{1}{2}\vec{b} + y(\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}) = y\vec{a} + \frac{1}{2}(y+1)\vec{b}$;

andererseits:

$\vec{s} = x\vec{k} = x(\vec{c} - \vec{l}) = x(\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2}x\vec{a} + x\vec{b}$.

Hieraus erhalten wir (nach Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$) sortiert:

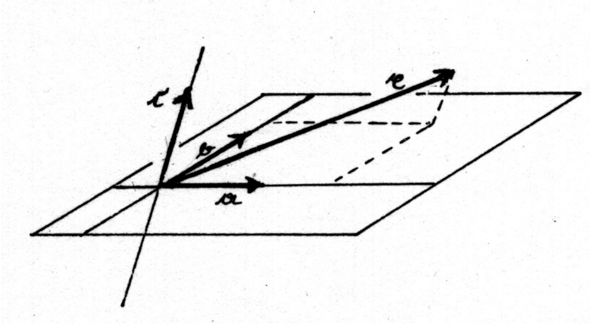
$$(\frac{1}{2}x - y)\vec{a} = \Big[\frac{1}{2}(y+1) - x\Big]\vec{b}.$$

(vi) Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig (also nicht parallel) sind, folgt jeweils aus einer Gleichung der Form $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{o}$, dass $k = m = 0$ gilt.

Im Beispiel:
$\frac{1}{2}x - y = 0$ und $\frac{1}{2}(y+1) - x = 0$, also $y = \frac{1}{2}x$ und $x = \frac{2}{3}$. Das Teilverhältnis ist als $1:2$, wie erwartet.

1.2 Vektoren des Anschaungsraumes

Die Ausführungen von (1.1) a) – c) gelten fast wörtlich, wenn man jeweils „Zeichenebene E " durch „Anschauungsraum" ersetzt. Ein Vektor ist dann eine Menge vektorgleicher Pfeile im Raum. Die höhere Dimension schlägt sich lediglich in den Teilen (d) und (e) explizit nieder, wo eine 3. Koordinate und entsprechend eine 3. Komponente (mit einem 3. Koordinatensystemvektor) hinzugezogen werden muss. Der Raum lässt sich nicht durch 2 Vektoren, sondern erst durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufspannen. Dabei darf $\vec{a}$ kein Vielfaches von $\vec{b}$ sein und $\vec{c}$ keine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Figur 1.23: Affines Koordinatensystem im Raum

1.3 Lösungen von linearen Gleichungssystemen

Die Behandlung linearer Gleichungen ist eine sowohl inner-mathematisch als auch für praktische Anwendungen bedeutsame Problemstellung. Wie von der Analytischen Geometrie gingen von ihr wesentliche Anstöße zur Entwicklung der Theorie der Vektorräume aus.

Diese Zusammenhänge werden plausibel, wenn man bedenkt, dass sich lineare Gleichungen oft geometrisch interpretieren lassen bzw. umgekehrt sich geometrische Gebilde oft durch Gleichungen beschreiben lassen.

Beispiel.

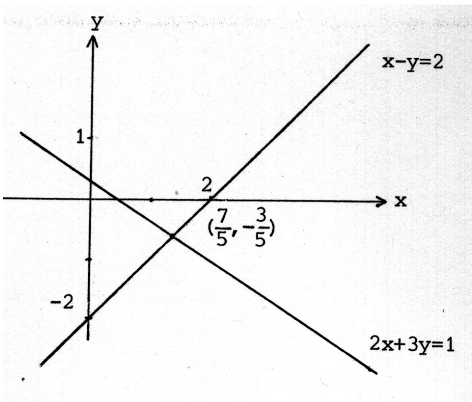
(a) Den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} 2x & +3y & = 1 \\ x & -y & = 2 \end{cases}$$

entsprechen im üblichen x-y-Koordinatensystem der Ebene zwei Geraden; deren Schnittpunkt hat, da er auf beiden Geraden liegt, beide Gleichungen erfüllende Koordinaten

$$x = \tfrac{7}{5} \quad \text{und} \quad y = -\tfrac{3}{5}.$$

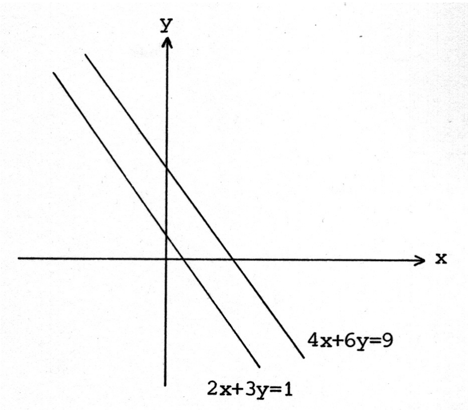
Dies ist die einzige gemeinsame Lösung beider Gleichungen.



Figur 1.24: Graphische Lösung zweier Gleichungen

(b) Zu $\begin{cases} 2x & +3y & = 1 \\ 4x & +6y & = 9 \end{cases}$

gehören in geometrischer Interpretation zwei parallele Geraden. (Beide Geraden haben die Steigung $-\frac{2}{3}$.) Das Fehlen eines Schnittpunktes bedeutet, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.



Figur 1.25: Veranschaulichung der Unlösbarkeit eines Gleichungssystems

(c) Betrachten wir die Lösungen der (linearen) Gleichung

$$-2x + 5y + z = 0, \qquad x, y, z \text{ reell.} \tag{$*$}$$

Erfüllen die drei reellen Zahlen x_1, y_1, z_1 diese Gleichung, so sprechen wir von einer **Lösung** von $(*)$ und schreiben das „Lösungstripel" in der Form $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$. Die Gleichung $(*)$ hat u.a. die Lösungen $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, allgemeiner $\begin{bmatrix} k \cdot 1 \\ 0 \\ k \cdot 2 \end{bmatrix}$ für k reell.

In Anlehnung an die Koordinatenschreibweise der S-Multiplikation bei Vektoren definieren wir zunächst eine „**S-Multiplikation**" zwischen reellen Zahlen und Lösungstripeln:

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix}$$

Diese Definition wird durch die obigen Beispiele von Lösungen nahegelegt, ist aber sonst völlig willkürlich. Wir erhalten damit: Mit dem Tripel $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist auch $k\alpha_1$ Lösungstripel für jede reelle Zahl k.
Analysieren wir den Beweis hierfür („Multiplikation der Gleichung" mit k), so zeigt sich allgemeiner:

$$\textbf{Ist } \boldsymbol{\xi} \textbf{ Lösung von } (*)\textbf{, so auch } \boldsymbol{k\xi}\ . \tag{i}$$

(Beweis ?)
Aber noch haben wir nicht alle Lösungen angegeben, so z.B. nicht solche, für die $x = 0$, $y \neq 0$ ist, wie z.B. $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ (und alle skalaren Vielfachen $k\beta_1$ mit k reell, $k \neq 0$).

Durch Multiplikation der Gleichung $(*)$ mit einer reellen Zahl k kamen wir eben von einer Lösung zu (sogar mehr als endlich) vielen. Es liegt nahe auch andere Operationen mit Gleichungen zu betrachten.

Seien also $\xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ und $\xi_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ Lösungen von $(*)$;

$$\begin{array}{ll} \text{es gilt dann} & -2x_1 + 5y_1 + z_1 = 0 \\ \text{und} & -2x_2 + 5y_2 + z_2 = 0 \quad . \\ \hline \text{Wir „addieren" und erhalten} & -2(x_1+x_2) + 5(y_1+y_2) + (z_1+z_2) = 0 \quad . \end{array}$$

Es ist also auch $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ Lösung von $(*)$.

Dies veranlasst uns, in Analogie zur Koordinatendarstellung der Vektoraddition eine **Addition zwischen Lösungstripeln** zu definieren:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} .$$

In dieser Schreibweise formuliert, haben wir also folgendes gezeigt:

Sind $\boldsymbol{\xi_1}$ und $\boldsymbol{\xi_2}$ Lösungen von $(*)$, so ist es auch $\boldsymbol{\xi_1 + \xi_2}$. (ii)

(Diese Tatsache hängt wie (i) wesentlich davon ab, dass $(*)$ linear ist und das „konstante Glied" (rechte Seite) in $(*)$ Null ist; wir sprechen von einer **homogen linearen Gleichung** .)

Mit den Lösungen α_1 und β_1 von $(*)$ folgt aus (i) und (ii) nun: Jede „Linearkombination„ $h\alpha_1 + k\beta_1$, h, k reell, ist Lösung von $(*)$.

Sind dies alle Lösungen? Für eine beliebige Lösung $\xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ gilt $z_1 = 2x_1 - 5y_1$, also

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 2x_1 - 5y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ -5y_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = x_1\alpha_1 + y_1\beta_1.$$

Damit lässt sich jede Lösung von $(*)$ als Linearkombination von $\boldsymbol{\alpha_1}$ und $\boldsymbol{\beta_1}$ darstellen; umgekehrt ist jede Linearkombination dieser Elemente Lösung von $(*)$.

Interpretieren wir x, y, z als die kartesischen Koordinaten von Punkten des Anschauungsraumes (wir schreiben sie als Ortsvektoren), so entspricht einem Lösungstripel $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$

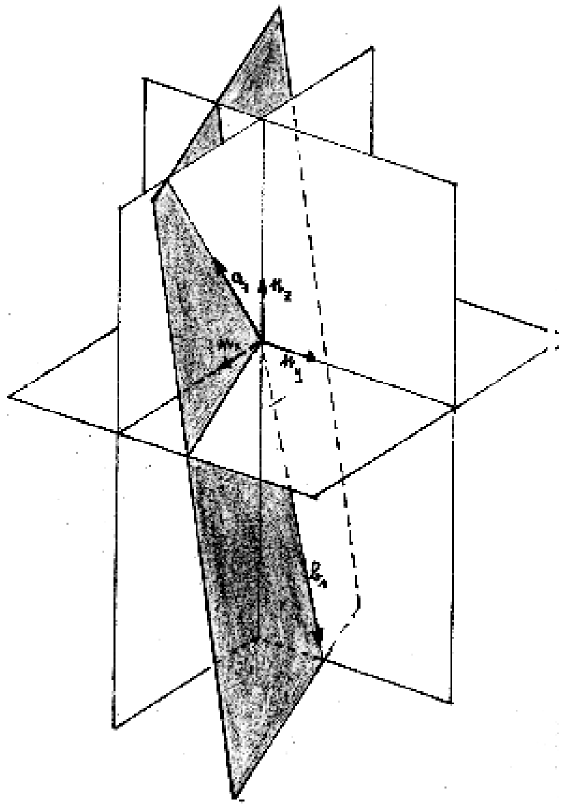
nun $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}}$. Die durch die Gleichung $(*)$ bestimmten Vektoren sind dann Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}}$ (entspricht α_1) und $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}}$ (entspricht β_1).

Geometrisch gesehen ist also

$$-2x + 5y + z = 0$$

die Gleichung einer Ebene durch den Ursprung.

Es hat sich hier gezeigt, dass die „Anleihe " bei der Vektorrechnung (Addition, S-Multiplikation, geometrische Interpretation) wesentlich dazu beigetragen hat, die Lösung der Gleichung $(*)$ „in den Griff zu bekommen". Dies hängt damit zusammen, dass in der Menge der Lösungen sich jedes Tripel wie ein geometrischer Vektor verhält. *Formal* kommt dies durch die Möglichkeit einer analogen Schreibweise, einer analogen Definition von Addition und S-Multiplikation sowie durch die **Gültigkeit analoger Rechengesetze** zum Ausdruck:



Figur 1.26: Eine Ebene als Lösung einer linearen Gleichung.

Es gilt nämlich wieder (für alle Lösungstripel α, β, γ)

- Assoziativität der Addition: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- Existenz eines Nullelements: $O := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (triviale Lösung) mit $\alpha + O = \alpha$.
- Möglichkeit zur Subtraktion: Zu jedem α existiert ein $-\alpha$ mit $\alpha + (-\alpha) = O$.
- Kommutativgesetz der Addition: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

sowie

- Assoziativgesetz der S-Multiplikation: $k(h\alpha) = (k \cdot h)\alpha$.

- 1. Distributivgesetz: $(k+h)\alpha = k\alpha + h\alpha$.
- 2. Distributivgesetz: $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$.
- Neutralität der reellen 1: $1\alpha = \alpha$.

Unter (i) und (ii) haben wir außerdem bewiesen, dass Summenbildung und S-Multiplikation nicht aus der Menge der Lösungen heraus führt. Alle diese Tatsachen sowie die Darstellbarkeit der Lösungen als reelle Linearkombinationen von α_1 und β_1 finden ihren Niederschlag in der Möglichkeit, die Lösungen geometrisch als Ebene im Raum darzustellen.

Ergänzung zu (1.2) & (1.3)

(i) Skalarprodukt

Seien $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems des Raumes; seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3} \qquad \text{und} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$$

beliebige Vektoren des Raumes. Dann definiert man das **(kanonische) Skalarprodukt** von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch[2]

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Zu den Rechenregeln beachte man Aufgabe 1.2a !
Auf dem Skalarprodukt lassen wir auch folgende Begriffe „aufbauen“:

Betrag (Länge) eines Vektors: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (in Übereinstimmung mit $|\vec{e}_i| = 1$ und der geometrischen Länge der Pfeile des Vektors $\vec{x}$). [3]
Orthogonalität zweier Vektoren: $\vec{x} \perp \vec{y}$: $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ (insbesondere $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für $i \neq j$).
Anmerkung: Man kann zeigen, dass $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ gilt.

(ii) Zur Ebenengleichung

Sei nun die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \tag{1}$$

gegeben, wobei nicht alle a_i Null seinen.
Jeder Lösung $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ordnen wir den Punkt des Raumes mit Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$ zu. Welches Gebilde beschreibt dann Gleichung (1)?

[2] Dabei bezeichnet $\sum_{i=1}^{k} a_i$ die Summe $a_1 + a_2 + \ldots a_k$.
[3] Beweis durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras!

Setzt man $\vec{m} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$, so lautet (1) nun $\vec{m} \cdot \vec{x} = b$.

Sei $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$ Ortsvektor eines Punktes, dessen Koordinaten (1) erfüllen; solch ein Punkt existiert (warum?).

Wegen $b = \vec{m}\vec{p}$ (denn $\vec{p}$ erfüllt definitionsgemäß (1)) ist auch folgende Gleichung zu (1) äquivalent:

$$\vec{m}(\vec{x} - \vec{p}) = 0. \tag{2}$$

Mit $\vec{\tilde{x}} := \vec{x} - \vec{p}$ erhalten wir $\vec{m}\vec{\tilde{x}} = 0$. Ähnlich wie im Beispiel (1.3) erhählt man allgemein: es existieren zwei (linear unabhängige) Vektoren $\vec{\tilde{y}}_1$, $\vec{\tilde{y}}_2$ derart, dass $\vec{m}\vec{\tilde{y}} = 0$ ist genau dann, wenn $\vec{\tilde{y}} = \vec{y} - \vec{p} \in \mathbb{R}\vec{\tilde{y}}_1 + \mathbb{R}\vec{\tilde{y}}_2$ $(:= \{k_1\vec{\tilde{y}}_1 + k_2\vec{\tilde{y}}_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{R}\})$. Als Lösungsmenge von (1) ergibt sich dann $\vec{p} + \mathbb{R}\vec{\tilde{y}}_1 + \mathbb{R}\vec{\tilde{y}}_2$, also eine **Ebene** E, die wegen $\vec{m} \perp (\vec{x} - \vec{p})$ für jedes $\vec{x}$, das Ortsvektor eines Punktes von E ist, orthogonal zu $\vec{m}$ ist. Normiert man $\vec{m}$ zu $\vec{n} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$ (Länge 1), so gilt auch $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$.

Durch die Gleichung $\boldsymbol{\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0}$ mit $\boldsymbol{|\vec{n}| = 1}$ ist eine Ebene definiert. Hierbei ist $\boldsymbol{\vec{p}}$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene, sowie $\boldsymbol{\vec{n}}$ ein normierter Richtungsvektor einer auf $\boldsymbol{E}$ „senkrecht stehenden“ Geraden.

Die Gleichung $\vec{n}\vec{x} = d$ mit $d = \vec{n}\vec{p}$ (bzw. $\vec{n}\vec{x} - d = 0$ oder $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$) mit $|\vec{n}| = 1$ heißt **Hessesche Normalform** der Gleichung der Ebene E. (Siehe auch Figur 1.27 !)

Beispiel. $-3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -27$

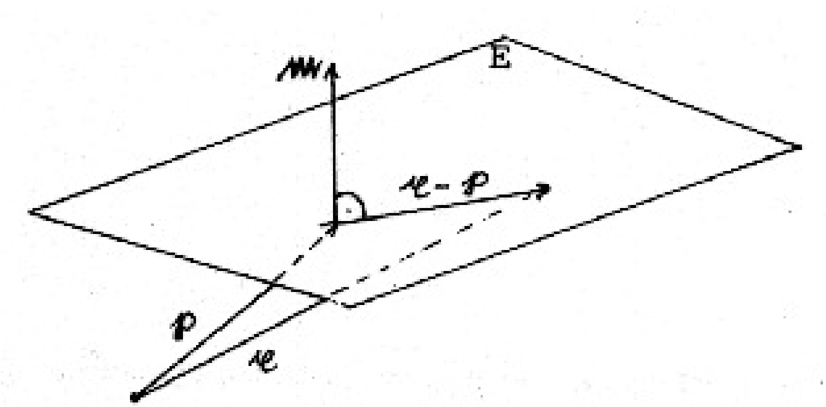
Es ist $|\vec{m}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$, und die Hessesche Normalform der zugehörigen Ebenen-
Gleichung lautet: $-\frac{3}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 + \frac{27}{7} = 0$. Die Ebene hat als Normalenvektor: $\vec{n} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$.

(iii) Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Neben dem Skalarprodukt ist noch eine weitere Produktbildung bei Vektoren des Raumes von Interesse, das **Vektorprodukt**. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems definiert man

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$$

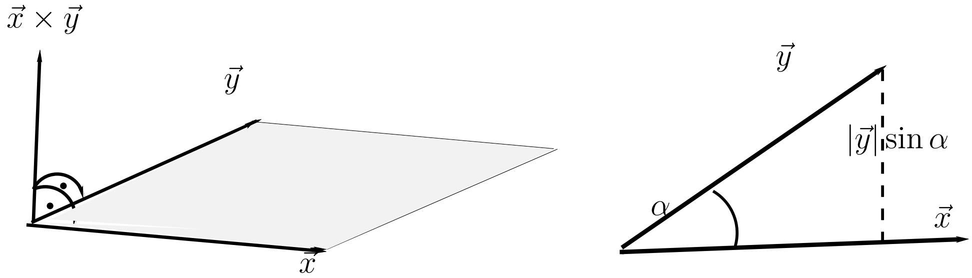
Man kann zeigen, dass



Figur 1.27: Zur Normalform einer Ebenengleichung : $\vec{m}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$

- $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ genau im Falle der linearen Abhängigkeit von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt;

- im anderen Falle $\vec{x} \times \vec{y}$ auf der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Nullpunktsebene senkrecht steht;



a) b)

Figur 1.28: a) $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Ebene.
b) Zum Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

- die Länge $|\vec{x} \times \vec{y}|$ des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist, nämlich $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$. (Siehe Figur 1.28 !)

  Damit ist das Vektorprodukt u.a. zur Bestimmung von Flächeninhalten, Normalenvektoren und Winkelgrößen benutzbar.

Achtung: Assoziativgesetz und Kommutativgesetz sind verletzt!

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-5) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 1(-5) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$ steht in Übereinstimmung damit, dass $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$ ein Normalenvektor der von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$ und

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$ aufgespannten, in (1.3)(c) durch die Gleichung $-2x + 5y + z = 0$ beschriebenen Ebene ist.

1.4 Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung

Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \qquad (**)$$

($y = y(t)$ bezeichen dabei eine reelle Funktion und y'' die zweimalige Ableitung von y nach t, die oft auch als $\ddot{y}$ geschrieben wird).

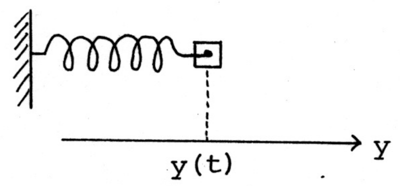
Anwendungsbeispiel. Ungedämpfter harmonischer Oszillator: Ein Körper der Masse $m = 1$ kg sei an einer Feder der Federkonstanten $D = 4$N/Meter befestigt. Feder- und Trägheitskraft seien die einzigen auf den Körper wirkenden Kräfte.
Bei der Auslenkung $y(t)$ aus der Ruhelage gilt dann zu jedem Zeitpunkt t für die rücktreibende Kraft $K = -Dy$ (s. Figur 1.29 !) und damit

$$m \cdot y''(t) = -D \cdot y(t).$$

Geben wir t in sec, y in Meter an, so gilt (**) für die Maßzahlen. Von Anfangsbedingungen sehen wir zunächst ab. Die Differentialgleichung (**) besitzt Lösungen, d.h. zweimal differenzierbare reelle Funktionen, die die Gleichung erfüllen. Unter Anwendung der Kettenregel verifiziert man, dass z.B. die Funktion y_1 mit

$$y_1(t) = \sin 2t$$

eine solche Lösung ist.



Figur 1.29:
Kraft bei Auslenkung aus der Ruhelage

Um einen Überblick über die Lösungen zu erhalten, überlegen wir uns (in Analogie zu (1.3)), wie wir gegebenenfalls aus bekannten Lösungen neue konstruieren können.
Sei etwa y eine Lösung; dann folgt aus $y''(t) + 4y(t) = 0$ durch Multiplikation mit reellem k

$$ky''(t) + 4ky(t) = 0.$$

Bezeichnen wir diejenige Funktion, deren Werte für jedes t gerade das k-fache der entsprechenden Werte von y sind, mit ky, sodass also

$$(ky)(t) := k \cdot y(t)$$

und $(ky)''(t) = ky''(t)$ für alle t gilt, **dann ist auch $\boldsymbol{ky}$ Lösung von** $(**)$. Insbesondere ist k_1y_1 mit $(k_1y_1)(t) = k_1 \cdot \sin 2t$ eine Lösung für jedes reelle k_1. Ähnlich ist y_2 mit $y_2(t) = \cos 2t$ Lösung und damit für jedes reelle k auch k_2y_2 mit $(k_2y_2)(t) = k_2 \cos 2t$.
Die Analogie zu (1.3) legt nahe, auch hier die „Summe" y_1 und y_2 zweier Lösungen y_1 und y_2 zu untersuchen. Dazu definieren wir die Summe von Funktionen y_1 und y_2 durch

$$(y_1 + y_2)(t) := y_1(t) + y_2(t).$$

Durch Addition der Gleichungen $y_1''(t) + 4y_1(t) = 0$ und $y_2''(t) + 4y_2(t) = 0$ und Anwendung der Differentiationsregel für Summen ergibt sich: **Sind $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$ Lösungen von** $(**)$**, so ist auch $\boldsymbol{y_1 + y_2}$ Lösung.**

Die Menge der Lösungen von $(**)$ ist also abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit einem Skalar („S-Multiplikation") und bzgl. Addition.

In Anwendung auf die bereits gefundenen Lösungen ($y_1(t) = \sin 2t$ und $y_2(t) = \cos 2t$) ergibt sich: Jede Linearkombination y mit

$$y(t) = k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t \quad , \quad k_1, k_2 \text{ reell},$$

('Superposition') ist Lösung. Es ist möglich zu zeigen dass jede Lösung von $(**)$ diese Form hat.

Anmerkung 1. Vorgegebene **Anfangsbedingungen** sondern dann Funktionen mit bestimmten k_1, k_1, aus der Menge der Lösungen aus. Wegen $y(0) = k_2$ und $y'(0) = 2k_1$ wird z.B. die Bedingung

(i) $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ nur durch die Funktion $\vec{o}$ mit $\vec{o}(t) = 0$ für alle t (**Nullfunktion**) (Körper in Ruhelage) bzw.

(ii) $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$ nur durch die Funktion y mit
$$y(t) = \tfrac{1}{2} \sin 2t + 2 \cos 2t = \sqrt{\tfrac{1}{4} + 4}\, \sin(2t + \varphi) \text{ (für } \tan \varphi = 4)$$
(ungedämpfte harmonische Schwingung) erfüllt.

Anmerkung 2. Wir vermerken, dass für Addition und S-Multiplikation bei Funktionen, insbesondere bei den Lösungen von $(**)$, entsprechende Rechengesetze wie bei den vorherigen Beispielen gelten, also:

Assoziativität der Addition Kommutativität der Addition Existenz einer Null (hier Nullfunktion $\vec{o}$) mit $f + \vec{o} = f$ Möglichkeit zur Subtraktion (Umkehrung der Addition): Zu f definieren wir $-f$ durch $(-f)(t) = -f(t)$; dann ist $f + (-f) = \vec{o}$ und $(g + f) + (-f) = g$. Assoziativgesetz der S-Multiplikation Beide Distributivgesetze der S-Multiplikation

Beweis. Übungsaufgabe

Anmerkung 3. Wie in den vorangegangenen Beispielen fällt auf, dass sich alle vorkommenden Vektoren als „Linearkombinationen" von einigen wenigen darstellen lassen. Die Angabe solcher Erzeugenden ist ein wesentliches Beschreibungsprinzip der (linearen) Algebra.

1.5 Ein Code (als binäres Modell)

(a) Dualcode

Beim Dualcode werden Zahlen im **Binärsystem** (Dualsystem) dargestellt. Dieses Zahlsystem verwendet statt der Zahlen 0 bis 9 des Dezimalsystems nur 0 und 1. Bei beiden Systemen gibt die Stellung einer Ziffer in der Darstellung einer Zahl ihre Wertigkeit an (Positionssysteme), beim Binärsystem aber nicht als Potenzen zur Basis 10, sondern zur Basis 2.

Beispiel. dezimal 1001 = dezimal $(1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0)$
binär 1001 = dezimal $(1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)$ = dezimal 9.
Die folgende Tabelle zeigt die ersten 10 Zahlen:

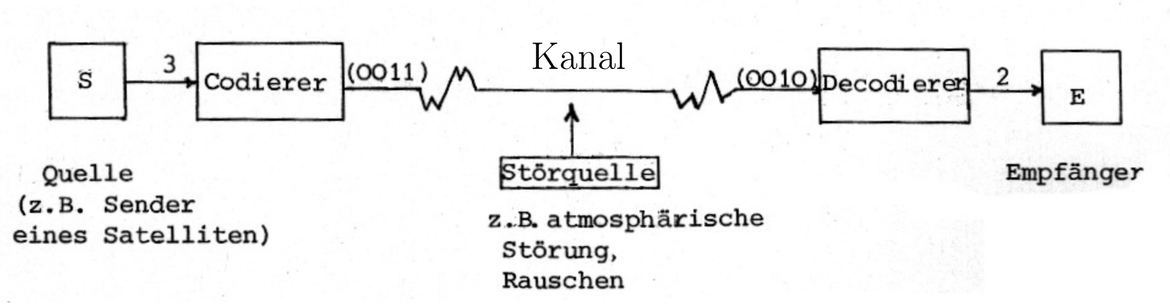
dezimal		dual	„Auffüllen“ zu „Wörtern“ der Länge 4 (Tetraden)
0	$0 \cdot 2^0$	0	0 0 0 0
1	$1 \cdot 2^0$	1	0 0 0 1
2	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1 0	0 0 1 0
3	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1 1	0 0 1 1
4	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1 0 0	0 1 0 0
5	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1 0 1	0 1 0 1
6	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1 1 0	0 1 1 0
7	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1 1 1	0 1 1 1
8	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1 0 0 0	1 0 0 0
9	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1 0 0 1	1 0 0 1

Tabelle 1.1: Binäre Darstellung der ersten 10 Zahlen

Bei größeren Zahlen kann man entsprechend codieren (geschlossene Codierung) oder jede Dezimalstelle einzeln codieren. *Anmerkung:* Es handelt sich hier nur um eine von vielen Möglichkeiten der numerischen Codierung; s. auch “ ASCII”-Code, “Unicode”, “UTF-8” etc.).

(b) Datenübertragung über gestörte Kanäle und binäre Addition

Ein (schematisches) Beispiel einer Übertragung über einen gestörten Kanal (Funkstrecke/Atmosphä oder Kabel, Magnetband, Glasfaser etc.) zeigt Figur 1.30.



Figur 1.30: Schema eines Übertragungssytems und Übertragungsbeispiel

	die gesendete Nachricht	$N_1 =$	O	O	1	1
	das empfangenes Signal	$E_1 =$	O	O	1	O
Dabei sind:	der „Fehlervektor“	$F_1 =$	O	O	O	1.

Zur mathematischen Beschreibung des Sachverhalts setzen wir $N = E \oplus F$, wobei „komponentenweise“ folgendermaßen zu „addieren“ ist: [4]

$$
\begin{array}{lr}
0\oplus 0=0 & \text{(kein Fehler)} \\
1\oplus 0=1 & \text{(kein Fehler)} \\
0\oplus 1=1 & \text{(Fehler)} \\
1\oplus 1=0 & \text{(Fehler).}
\end{array}
$$

Die letzten 4 Vereinbarungen schreiben wir auch in der Form einer **„Verknüpfungstafel“**:

$$
\begin{array}{c|cc}
\oplus & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0
\end{array}\;.
$$

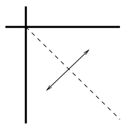
Anmerkung: Wie man sieht und wie wir weiter unten noch vertiefen werden, hängt die Addition eng mit der Anzahl der Summanden „1“ in einer Summe[5] zusammen. Ist diese Anzahl (die sogenannte **Parität**) gerade, so ist die Summe 0, andernfalls 1. Ersetzt man daher 0 durch g (wie „gerade“) und 1 durch u (wie „ungerade“) , so ergibt sich als Verknüpfungstafel:

$$
\begin{array}{c|cc}
\oplus & g & u \\
\hline
g & g & u \\
u & u & g
\end{array}\;.
$$

Diese entspricht den bekannten Additionsregeln:

gerade	plus	gerade	=	gerade
gerade	plus	ungerade	=	ungerade
ungerade	plus	gerade	=	ungerade
ungerade	plus	ungerade	=	gerade .

Wir kommen zu weiteren Eigenschaften dieser Addition auf $\{0,1\}$ (bzw. $\{g,u\}$):
Ist die *Abgeschlossenheit* der Addition schon vorher ersichtlich, so erkennt man an der



Symmetrie
der Verknüpfungstafel sofort die *Kommutativität der Addition*; auch die *Neutralität* der Null ist leicht zu erkennen. Jedes Element ist sein eigenes *Inverses.* Schließlich gilt noch das *Assoziativgesetz*, wie sich durch Prüfen der einzelnen Fälle zeigt.

[4] also nicht, wie bei der gewöhnlichen Addition im Dualsystem, $1 + 1 = 10$, d.h. 0 mit Übertrag 1. Beachten Sie auch die untenstehende Anmerkung zu einer Addition auf $\{u, g\}$!

[5] auch mit mehreren Summanden

(c) Codierung zur Fehlererkennung

Mit dem Ziel, **einen** Übertragungsfehler pro Wort erkennen zu können, fügen wir den bisherigen Codewörtern noch je ein Kontrollsymbol (ähnlich den Prüfziffern bei Kontonummern) hinzu. Dabei benutzen wir die eben definierte Addition auf $\{0,1\}$ und bilden die „Quersumme" der Informationssymbole (**„Paritätskontrolle"**): Anstelle von $a_1a_2a_3a_4$ senden wir $\underbrace{a_1a_2a_3a_4}_{\text{Informationsteil}}\ \underbrace{a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4}_{\text{Kontrollziffer}}$.

Beispiel. Für 0 0 1 1 senden wir 0 0 1 1 0.

Anmerkung. Auch hier haben wir wieder nur eine von vielen Möglichkeiten zur Codierung herausgegriffen; der entsprechende Code heißt **Paritätscode**; bei ihm ist die Anzahl der Einsen im Codewort gerade, d.h. die binäre Quersumme der Symbole gleich 0:

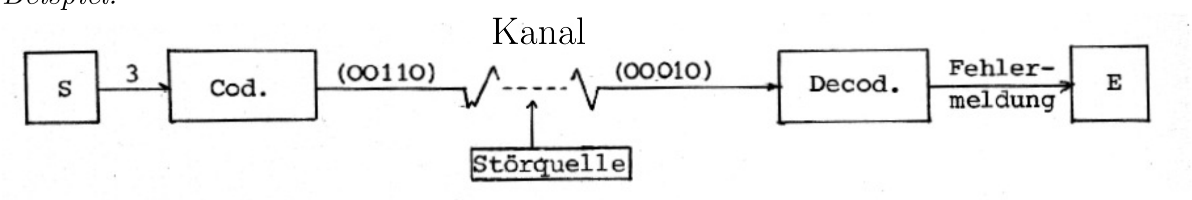
$$\begin{aligned}
&a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4) && \text{Assoziativgesetz, Kommutativgesetz}\\
&\quad = (a_1 \oplus a_1) \oplus (a_2 \oplus a_2) \oplus (a_3 \oplus a_3) \oplus (a_4 \oplus a_4) && \text{Selbstinverse}\\
&\quad = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 && \text{Neutralität der 0}\\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Codewörter sind daher Wörter der Form $a_1a_2a_3a_4a_5$, die die (Paritätskontroll-) Gleichung

$$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 = 0$$

erfüllen (und umgekehrt). Wörter, die durch Abänderung einer Komponente aus einem Codewort entstehen, haben Quersumme 1 und sind damit als fehlerhaft zu erkennen:

Beispiel.



Figur 1.31: Beispiel einer Übertragung mit Fehlererkennung

(d) Weiter Strukturierung

Wir vermerken, dass wir auch zwischen den Wörtern der Länge 5 aus Nullen und Einsen eine Addition komponentenweise definieren können:

Beispiel.

$$\begin{array}{rcccccc}
E_2 & = & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
F_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\hline
N_2 = E_2 \oplus F_2 & = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\ .
\end{array}$$

Dabei übertragen sich viele der Rechengesetze, insbesondere die von uns herausgestellten: Abgeschlossenheit der Addition, Assoziativgesetz, Existenz eines neutralen Elements (hier 00000), Existenz eines Inversen zu jedem Wort (hier das Wort selbst) und das Kommutativgesetz.

Ferner ist es möglich, eine (banal erscheinende) **S-Multiplikation** zu definieren durch $0 \cdot W = 00000$ bzw. $1 \cdot W = W$ für jedes der betrachteten Wörter W.

Definiert man, motiviert auch durch die Multiplikationsregeln

gerade	mal	gerade	=	gerade
gerade	mal	ungerade	=	gerade
ungerade	mal	gerade	=	gerade
ungerade	mal	ungerade	=	ungerade ,

eine Multiplikation zwischen den Elementen $0\,(\hat{=}\, g)$ und $1\,(\hat{=}\, u)$ durch folgende Verknüpfungstafel:

$$\begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array},$$

so kann man die S-Multiplikation wieder komponentenweise ausführen. Für sie gilt neben der Abgeschlossenheit und den beiden Distributivgesetzen auch das Assoziativgesetz

$$k \cdot (l \cdot W) = (k \odot l) \cdot W.$$

Damit ist, zumindest was die Rechengesetze betrifft, eine Analogie zwischen der eben behandelten Struktur und den vorigen hergestellt; als neuer „Tatbestand“ ist nun hinzugekommen, dass die **Skalare nicht mehr reelle Zahlen** sind (jedoch noch den meisten der für reelle Zahlen gültigen algebraischen Rechenregeln genügen.)
Ähnlich wie in (1.3) lassen sich die Lösungen der linearen Gleichung $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 = 0$, die ja Codewörter $a_1a_2a_3a_4a_5$ ergeben, als Linearkombinationen einiger weniger darstellen. „Erzeugende“ sind z.B. die Codewörter $\alpha_1 = 10001$, $\alpha_2 = 01001$, $\alpha_3 = 00101$ und $\alpha_4 = 00011$. Jedes Codewort ist dann von der Form

$$k_1\alpha_1 \oplus k_2\alpha_2 \oplus k_3\alpha_3 \oplus k_4\alpha_4 \quad \text{mit } k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1\}.$$

Es wird sich herausstellen, dass die bei jedem der obigen Beispiele herausgestellten Rechengesetze deren (algebraische) Struktur schon wesentlich festlegen, sodass eine **gemeinsame Theorie** möglich und sinnvoll wird. Diese Theorie ist die des (abstrakten) Vektorraums (auch linearer Raum genannt), des Hauptgegenstandes unserer Vorlesung. Parallel zu diesem Thema versuchen wir, unsere Sprache zu präzisieren und zu normieren. Dies wird, nach evtl. anfänglichen Schwierigkeiten, sowohl die Kommunikation erleichtern als auch die Argumentation sicherer und nachprüfbarer gestalten.

Übungsaufgaben:
Aufgabe 1.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_0 der Differentialgleichung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

so, dass y_1 und y_{-1} mit $y_1(x) = e^x$ und $y_{-1}(x) = e^{-x}$ Lösungen dieser Gleichung sind. Sind dann auch die (Hyperbel-)Funktionen sinh und cosh mit

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Lösungen dieser Differentialgleichung?

Anmerkung: Ohne Beweis dürfen Sie hier Eigenschaften der Exponentialfunktion verwenden, u.a. die Tatsache, dass $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und $(e^x)' = e^x$ ist.

Aufgabe 1.2 a) Zeigen Sie für das kanonische Skalarprodukt des Raumes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad !$$

für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des Raumes!
b) Benutzen Sie Teil a) zum Nachweis der Formel

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) \quad !$$

c) Warum heißt die Gleichung aus b) „**Parallelogrammgleichung**“? Interpretieren Sie sie elementargeometrisch mit Hilfe einer Skizze!

Aufgabe 1.3 [6]:
Wir definieren eine Abbildung von binären Tetraden auf binäre 8-Tupel

$$\mathfrak{c} : a_1a_2a_3a_4 \mapsto a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$$

durch

$$\begin{array}{lclcl} a_5 & := & a_1 & \oplus & a_3; \\ a_6 & := & a_2 & \oplus & a_4; \\ a_7 & := & a_1 & \oplus & a_2; \\ a_8 & := & a_3 & \oplus & a_4. \end{array}$$

Zeigen Sie:
1. $\mathfrak{c}$ ist additiv, d.h. es gilt : $\mathfrak{c}(a_1a_2a_3a_4 \oplus b_1b_2b_3b_4) = \mathfrak{c}(a_1a_2a_3a_4) \oplus \mathfrak{c}(b_1b_2b_3b_4)$.
2. Einen Übertragungsfehler in einer Komponente eines Wortes kann man nicht nur feststellen, sondern sogar korrigieren.
Lösungshinweis: Schreiben Sie $a_1a_2a_3a_4$ in ein $2 \times 2-$ Quadrat, und addieren Sie die Einträge jeder Zeile und jeder Spalte!

[6] Starke Vereinfachung eines bei Magnetbändern verwendeten Codes !