# Wiederholung und Vertiefung zum Lehrerweiterbildungskurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz:Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

**Themenkreis 0: Gruppen/Ringe/Körper** s.[Sch] p.223 f.

1. *Definition: Gruppe*

<table>
<tr><td rowspan="5">$(G,*)$ Gruppe mit neutralem Element $e$</td><td rowspan="3">$(G,*)$ Halbgruppe</td><td>$G$ Menge, $G \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td>$* : G \times G \to G$<br>$(a,b) \mapsto a * b$ (innere Verknüpfung)</td></tr>
<tr><td>Assoziativgesetz<br>$\forall a,b,c \in G: \ a*(b*c) = (a*b)*c$</td></tr>
<tr><td>$e \in G$ neutrales Element</td><td>$\forall a \in G : a * e = a = e * a$</td></tr>
<tr><td>Existenz der Inversen</td><td>$\forall a \in G \ \exists b \in G : b * a = e = a * b$</td></tr>
</table>

**Definition Untergruppe, Untergruppenkriterium**...
$U \neq \emptyset$ und $U \cdot U^{-1} \subseteq U$

Beispiel einer Halbgruppe, die keine Gruppe ist: $(\mathbb{N}, +)$
Beispiele von Gruppen:
- additive Gruppen von Ringen, Körpern, Vektorräumen
- $(\mathcal{S}_M, \circ)$, Gruppe aller bijektiven Abbildungen von $M$ auf sich mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung, speziell $\mathcal{S}_n := (\mathcal{S}_{\{1,\ldots,n\}}, \circ)$ (*symmetrische Gruppe* mit $|\mathcal{S}_n| = n!$) (siehe unten!)
- Gruppe $D_m$ der Deckabbildungen eines regelmäßigen $m$-Ecks in der reellen euklidischen Ebene

2. *Definition: Ring*

| | |
|---|---|
| $(R, +, \cdot)$ **Ring** | $R$ Menge, "+" $R \times R \to R$, "$\cdot$" : $R \times R \to R$ |
| | $(R, +)$ kommutative Gruppe, d.h.<br>Gruppe mit $\forall a, b \in R: \quad a + b = b + a$ |
| | $(R, \ \cdot\ )$ Halbgruppe |
| | Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$<br>und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |

*Beispiele* von Ringen:
• $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring der ganzen Zahlen;
• Körper (s.u.)
• $(K[X], +, \cdot)$,
• $(\mathrm{End}_K V, +, \circ)$, der Endomorphismenring eines Vektorraums
• $\mathbb{Z}_m$ (Elemente, Addition, Multiplikation, Nullteiler?)
mit Elementen der Form $\overline{a} = a + m\mathbb{Z}$ mit $a \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
($\to$ Rechnung mod m)
$a + m\mathbb{Z}$ Nullteiler, falls $\mathrm{ggT}(a, m) \neq 1$ und $0 < a < m$
• $\mathbb{R}[X]$ Ring der Polynome über $\mathbb{R}$
Elemente der Form : $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$

*Anmerkung:* Die Elemente eines Ringes mit 1, die eine multiplikative Inverse besitzen, sogenannte *Einheiten*, bilden eine Gruppe (bzgl. der induzierten Multiplikation)

3. *Definition: Körper*

<table>
<tr><td rowspan="5">$(K, +, \cdot)$<br>Körper</td><td rowspan="4">$(K, +, \cdot)$<br>Schiefkörper</td><td>$K$ Menge, $+$ , $\cdot$ innere Verknüpfungen</td></tr>
<tr><td>$(K, +)$ kommutative Gruppe</td></tr>
<tr><td>$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppe[1]</td></tr>
<tr><td>Distributivgesetze (wie bei Ringen)</td></tr>
<tr><td colspan="2">kommutativ</td></tr>
</table>

*Beispiele:* • $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ • $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ • $(\mathbb{C}, +, \cdot)$,
• $\mathrm{GF}(p) := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ für $p$ Primzahl

4. *Definition:* **Algebra** ($(V, +, \underset{K}{\cdot}, \cdot)$ heißt $K$-*Algebra*, wenn $(V, +, \underset{K}{\cdot})$ ein $K$-Vektorraum und $(V, +, \cdot)$ ein Ring ist und folgende Verträglichkeitsbedingungen gelten:

[1] Die Multiplikation " $\cdot$ " sei hierbei auf $K \setminus \{0\}$ beschränkt.

$$\forall a, b \in V \ \forall \lambda \in K : \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

*Beispiele:* $(\mathrm{End}_K V, +, \dot{_K}, \circ)$, $K^{(n,n)}$, $K[X]$, $\mathbb{R}$ (z.Bsp. als $\mathbb{Q}-$ Algebra).

**Zur Gruppe der Permutationen**

s.[Sch-LAI] p.68 und p.179ff.

**Definition Permutation**

Sei $M$ n.l. Menge. Eine bijektive Abbildung von $M$ auf sich heißt auch *Permutation*; wir definieren

$$\mathcal{S}_M := Bij(M, M) := \{f : f \text{ Permutation von } M\}$$

und $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_{\{1,2,\ldots,n\}}$.

*Schreibweise:* Ist $f \in \mathcal{S}_n$, so schreiben wir auch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$