Lösungen zur
Modulprüfung zur
Elementaren Algebra/Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrkräfte an der FU
Dozent: V.Schulze Datum: 16.1.2024
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Permutation $\pi := (2, 1, 3)$ aus der symmetrischen Gruppe S_3 vom Index 3.
(i) Gilt $\pi = (1, 2) \circ (1, 2, 3)$?
Stelle π dar als Produkt von Transpositionen.
(ii) Man zeige:
$U := \{id, \pi, \pi^2\}$ ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_3 , die in S_3 genau zwei Linksnebenklassen besitzt .
U ist Normalteiler in S_3 .

Lösung zu Aufgabe 1

(i) $\pi := (2, 1, 3)$ bildet zum Beispiel 1 auf 3 ab.
Die Permutation $(1, 2) \circ (1, 2, 3)$ bildet 1 auf 1 ab.
Also gilt nicht $\pi = (1, 2) \circ (1, 2, 3)$.
Nach einer Formel aus der Vorlesung gilt $\pi := (2, 1, 3) = (2, 1) \circ (1, 3)$.
(ii) Es gilt $\pi^3 = id$, π^2 ist nicht die Identität.
Also ist U die von π erzeugte Untergruppe.
S_3 hat 6 Elemente, U hat 3 Elemente.

Nach Lagrange besitzt U dann genau zwei Linksnebenklassen.
Eine Untergruppe mit zwei Linksnebenklassen ist nach Vorlesung stets Normalteiler.

Aufgabe 2

Betrachte den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Die Abbildung $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sei definiert durch
$f(a + b\sqrt{2}) := a - b\sqrt{2}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
Man zeige: f ist relationstreu bezüglich +.
Man zeige: f ist ein Ring-Homomorphismus.
(ii) Ist $1 + \sqrt{2}$ Einheit des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Ist $2 + \sqrt{2}$ Einheit des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Es gilt $f((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) = f((a+c)+(b+d)\sqrt{2}) = (a+c)-(b+d)\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2} + (c - d)\sqrt{2} = f(a + b\sqrt{2}) + f(c + d\sqrt{2})$.
Also ist f ist relationstreu bezüglich +.
Es gilt $f((a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})) = f((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2}) \cdot (c - d\sqrt{2} = f(a + b\sqrt{2}) \cdot f(c + d\sqrt{2})$.
Also ist f ist relationstreu bezüglich $\cdot$.
Zusammen folgt: f ist ein Ring-Homomorphismus.
(ii) Es gilt $(1 + \sqrt{2}) \cdot (-1 + \sqrt{2}) = 1$, also ist $1 + \sqrt{2}$ Einheit des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
.
Es gilt $(2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{(2-\sqrt{2})}{2} = 1$. Wegen $\frac{(2-\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist $2 + \sqrt{2}$ keine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Aufgabe 3

(i) Man stelle durch Rechnung modulo 7 fest, ob $23^6 - 10$ Vielfaches von 7 ist.
Man stelle mit Hilfe der 11-er Probe fest, ob $23^6 - 10$ Vielfaches von 11 ist.
(ii) Man stelle mit Hilfe der 3-er Probe fest, ob $23^6 - 10$ Vielfaches von 3 ist.
Man stelle mit Hilfe der 9-er Probe fest, ob $23^6 - 10$ Vielfaches von 9 ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Nach dem Satz von Fermat gilt $23^6 \equiv 1 \pmod 7$, also $23^6 - 10 \not\equiv 0 \pmod 7$.
Also ist $23^6 - 10$ nicht Vielfaches von 7 .
Die alternierende Quersumme von 23 ist 1, die von 10 ist -1.
Es gilt $(1)^6 - (-1) \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{11}$.
Die 11-er Pobe liefert also : $23^6 - 10$ ist nicht Vielfaches von 11 .
(ii)Die Quersumme von 23 ist 5, die von 10 ist 1.

Es gilt $5^6 - 1 \equiv (-1)^6 - 1 \equiv 0 \pmod 3$.
Die 3-er Pobe liefert also : $23^6 - 10$ ist Vielfaches von 3 .
Es gilt $5^6 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 9$.
Man kann hierbei den Kongruenzsatz von Euler benutzen, also $5^6 \equiv 1 \pmod 9$.
Die 9-er Pobe liefert also : $23^6 - 10$ ist Vielfaches von 9 .

Aufgabe 4

(i) Man zeige : $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
Ist $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ist irreduzibel ?
(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Man zeige : $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ist Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.
Man stelle $(\alpha + 1)^{-1}$ als Linearkombination der Basiselemente dar.

Lösung zu Aufgabe 4

(i) Es gilt $(x+1)^3 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$.
Nach Eisenstein ($p = 3$) ist also $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel.
Nach Vorlesung ist dann auch $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
Da $0 \in \mathbb{Z}_3$ Nullstelle von $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ist, ist $(x+1)^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ nicht irreduzibel.
(ii)Da $(x+1)^3 + 2$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist, folgt nach Vorlesung : $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ist Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.
Es ist $(\alpha + 1)^3 = -2$, also $(\alpha + 1)^{-1} = -\frac{1}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$.