

Raum ist, ergibt sich das Lösbarkeitskriterium (s.auch [F] p.69 und W4):

Genau dann ist (*) lösbar, wenn \vec{b} von den Spalten von A linear abhängt, also für die erweiterte Koeffizientenmatrix gilt:

$$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang } A.$$

- (iii) Ist das LGS (*) lösbar, so existiert ein \vec{p} mit $f_A(\vec{p}) = \vec{b}$ (eine "spezielle Lösung" oder "**Partikulärlösung**"). Für das volle Urbild von \vec{b} unter f_A gilt dann $L = f_A^{-1}(\vec{b}) = \vec{p} + \text{Kern } f_A$, also $L = \vec{p} + L_0$; es ist L also ein affiner Unterraum von K^n zum Unterraum L_0 und Stützvektor \vec{p} . Für diesen affinen Unterraum gilt $\dim_K L = n - \text{Rang } A$.

2. **Beispiel 1:** Sei $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mittels elementarer Zeilenumformungen den Lösungsraum des LGS's

$$(*) \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 & = 0 \\ \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 & = 1 \\ \xi_1 - 2\xi_2 & - \xi_4 = 2 \\ & \xi_3 + 2\xi_4 = -1 \end{cases}.$$

Antwort (vgl. [Sch] p. 18f.):

$$\text{Es ist } (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Durch elementare Zeilenumformung (s.[F] p.63) erhält man z.B. (mit unterstrichenen Pivot-Elementen):

$$(A|b) \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ z'_2 = z_2 - z_1 \\ z'_3 = z_3 - z_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-3} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ z''_3 = z'_3 - z'_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \leftrightarrow \\ z'_4 = z_4 + z'_3 \\ z''_2 = \frac{1}{3} z'_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow (*) \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 & = 0 \\ -\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3 & = \frac{1}{3} \\ & -\xi_3 - \xi_4 = 1 \\ & \xi_4 & = 0 \end{cases}$$

woraus sich $\xi_4 = 0$, $\xi_3 = -\xi_4 - 1 = -1$, $\xi_2 = \frac{2}{3}\xi_3 - \frac{1}{3} = -1$ und $\xi_1 = -\xi_2 + \xi_3 = 0$ ergibt. Das LGS $(*)$ und damit $(*)$ ist also eindeutig lösbar mit $L = \{(0, -1, -1, 0)\}$. (Probe!)

3. Beispiel 2:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +8x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & +x_3 & = & 1 \end{cases}$$

über \mathbb{R} .

- (i) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ an!
- (ii) Begründen Sie zunächst ohne Berechnung der Lösungen, dass $(*)$ lösbar ist!
- (iii) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform! (Vgl. [F] p.69, auch W4)
- (iv) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $(*)$!
- (v) Geben Sie eine allgemeine Lösung des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems an!
- (vi) Geben Sie den Lösungsraum L von $(*)$ an!

Lösung (vgl. [Sch] Aufgabe L35)

- (i) Die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

- (ii) A_{erw} hat den gleichen Rang wie die Koeffizientenmatrix A von $(*)$. (Dies folgt z.B. daraus, dass die letzte Spalte von A_{erw} gleich der Summe der beiden ersten Spalten ist, sodass die Erweiterung nicht den Rang erhöht.) Nach dem bekannten Lösbarkeitskriterium (s.[F] p.69) ergibt sich die Lösbarkeit von $(*)$ aus $\text{Rang } A = \text{Rang } A_{\text{erw}}$.
- (iii) Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
A_{\text{erw}} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (\overline{z_2} = z_2 - 3z_1) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\overline{\overline{z_2}} = \frac{1}{2}\overline{z_2} \text{ und } \overline{\overline{z_3}} = \overline{z_3 - \overline{z_2}}).
\end{aligned}$$

(iv) Da elementare Zeilenumformungen den Lösungsraum nicht verändern, sind die Lösungen von (*) genau die Lösungen von

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 & + 2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{cases} .$$

Setzt man nun $x_3 = 0$, so sieht man, dass z.B. $x_p = (1, 1, 0)$ eine Lösung von (*) und damit von (*) ist.

(v) Der Lösungsraum L_0 des zu (*) gehörenden homogenen Systems ist gleich dem Lösungsraum des zu (*) gehörenden homogenen Systems, also von

$$(*'_1) \quad \begin{cases} x_1 & + 2x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases} .$$

Es folgt $L_0 = \{(-2x_3, -x_3, x_3) | x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2, -1, 1)x \mid x \in \mathbb{R}\} = (-2, -1, 1)\mathbb{R}$.

(Alternativ kann man $x_3 = 1$ in (*'_1) setzen und so $(-2, -1, 1) \in L_0$ sehen. Das obige Ergebnis ergibt sich dann z.B. aus Dimensionsgründen.)

(vi) Der Lösungsraum von (*) und damit von (*) ist nach einem Satz gleich $x_p + L_0$, also

$$L = (1, 1, 0) + (-2, -1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - 2x, 1 - x, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

4. **Beispiel 3** Aufgabe W6

5. **Beispiel 4** Aufgabe F5