

Themen und Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz: Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

[F] Formelsammlung

Themenkreis 2: Lineare Abbildungen, Matrixdarstellung

1. Seien V_1, V_2 K -Vektorräume. Definieren Sie, was unter einer linearen Abbildung von V_1 in V_2 zu verstehen ist!

Antwort: Eine Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ heißt **linear** oder **K-Homomorphismus**, falls gilt:

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \\ (\text{für alle } v, w \in V_1, \lambda \in K)$$

2. Beispiele von linearen Abbildungen:
Mit der Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in K^{(m,n)}$ ist die Abbildung f_A linear, wobei

$$f_A : K^n \rightarrow K^m \quad \text{definiert ist durch} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Form von A für $f = f_A$, falls f

- $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Linearform ist
- zentrische Streckung mit Zentrum \vec{o} und Streckungsfaktor λ in \mathbb{R}^n
- Spiegelung an der zweiten Koordinatenachse in \mathbb{R}^2 (mit euklidischem Abstand)
- Drehung um \vec{o} um den Winkel α in \mathbb{R}^2 (mit euklidischem Abstand)
- Parallelprojektion längs der zweiten Koordinatenachse auf die erste in \mathbb{R}^2 .

Antworten: $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $A = \lambda I_n$ mit $(n \times n)$ -Einheitsmatrix
 $I_n = (\delta_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Vgl. mit [Sch] p.10-12.

3. Beschreiben Sie eine minimale Menge von Vektoren, durch deren Bilder eine lineare Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ schon bestimmt ist, und beweisen Sie den **Fortsetzungssatz**.

Antwort: Eine Basis von V_1 ist ausreichend. Denn es gilt der Fortsetzungssatz: Ist $B = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V_1 und $(w_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren von V_2 mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung f von V_1 in V_2 mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Beweisidee: $f(\sum \lambda_i b_i) = \sum \lambda_i f(b_i)$
vgl. [Sch] p.11 und auch W3

4. Geben Sie die **Matrixdarstellung** einer linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen an!

Antwort: Seien V_1, V_2 K -VR'en endlicher Dimension und $f : V_1 \rightarrow V_2$ linear. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis von V_1 und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basis von V_2 , so existieren Skalare

$$\alpha_{ij} \quad \text{mit} \quad f(b_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} c_i \quad (j = 1, \dots, n).$$

Wir definieren $M_C^B(f) := (\alpha_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ als die "Matrix" von f bzgl. B und C ; also:

$$M_C^B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array} \right)$$

mit den Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren von B , dargestellt bzgl. C , als Spalten.

Vgl. mit W2, Teilen von W3 und (in Umkehrung M gegeben) W4!

Anmerkungen: a) Es gilt $M_C(f(x)) = M_C^B(f) \cdot M_B(x)$ für die Koordinatenvektoren $M_B(x)$ bzw. $M_C(y)$ von x bzgl. B bzw. y bzgl. C .

b) Die Abbildung $\text{Hom}_K(V_1, V_2) \rightarrow K^{(m,n)}$ mit $f \mapsto M_C^B(f)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus

5. Geben Sie an, wie sich Eigenschaften von linearen Abbildungen an den darstellenden Matrizen erkennen lassen (z.B. Rang, Bijektivität).

Antwort: vgl. [Sch] p.13, z.Teil [F] p.66

6. Was ist unter dem **Kern** einer linearen Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$, was unter dem **Bild** von f zu verstehen? Welche Struktur besitzen Kern f und Bild f ? Wie sehen die vollen Urbilder der Elemente von V_2 aus?

Antworten (vgl. [Sch] p.14):

Kern $f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\}$ ist Unterraum von V_1

Bild $f = \{f(v) \mid v \in V_1\}$ ist Unterraum von V_2 .

Das volle Urbild von $f(v)$ aus Bild f ist $v + \text{Kern } f$.