

Wiederholung und Vertiefung zu 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz:Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

[F] Formelsammlung Duden/Cornelsen

[W] W-Aufgabe

Themenkreis 1: a) Vektorraum, Unterraum b) Basis, Dimension

a) Vektorraum, Unterraum

1. Modell für die Zeichenebene, für den Anschauungsraum

- Welche Modelle?
 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
- Geradengleichungen (verschiedene Formen)
Antworten: $y = mx + b$ und $x = c$ bzw. Punkt-Richtungsgleichung, Zweipunktgleichung, Hessesche Normalform s.u.
- Ebenengleichungen (verschiedene Formen)
Antworten: 3-Punkte-Gleichung; Hessesche Normalform, s.u., s.auch [Sch] p.19-22

2. Allgemeiner: Geraden im 2-dimensionalen affinen Raum ;

- vektorielle Punkt-Richtungs-Form* (s.Übung W0 und [F] p.46)
 $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{a}$ mit Ortsvektor \mathbf{x} eines beliebigen Punktes der Geraden g , Stützvektor \mathbf{p}_0 , d.h. Ortsvektor eines Punktes (Aufpunktes) von g , bis auf Vielfache bestimmtem Richtungsvektor \mathbf{a} von g und Skalar t (aus dem Grundkörper K des Vektorraums).
- vektorielle Zwei-Punkte-Form*: $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$ mit verschiedenen Punkten $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ von g und $t \in K$ (s. Abb. b).
- Koordinatengleichung* : $ax + by + c = 0$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$.
Anmerkung : Setzt man in der vektoriiellen Punkt-Richtungsform aus a) $\mathbf{x} = (x, y)$, ferner $\mathbf{a} = (1, m)$ und $\mathbf{p}_0 = (0, b)$ bzw. $\mathbf{a} = (0, 1)$ und $\mathbf{p}_0 = (c, 0)$, so erhält man als Koordinatengleichung $y = mx + b$ bzw. $x = c$ (s. Abb. 3 a).

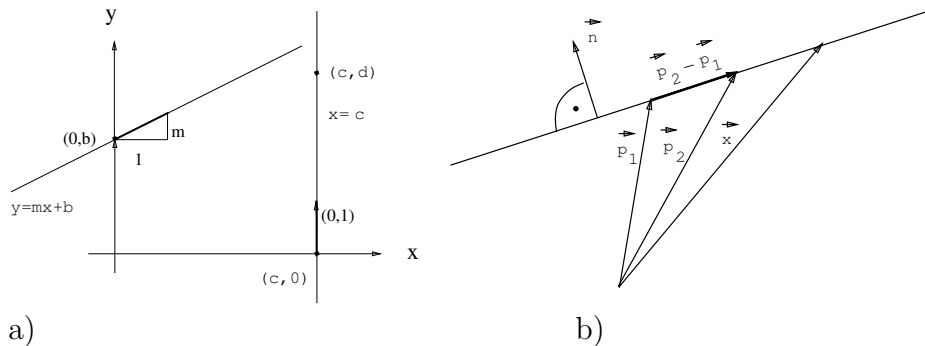


Abbildung 1

a) Zur Koordinatengleichung einer Geraden

b) Zur vektoriellen Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1), t \in K$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p}_1)\vec{n}^0 = 0$ mit $\vec{n}^0 \perp (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ und $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, damit $|\vec{n}^0| = 1$.

d) Hessesche Normalform in $EG(\mathbb{R}^2)$ (s. Abbildung 1 b und [F] p.46)

3. Geraden im 3-dimensionalen affinen Raum :

a), b) vektorielle Punkt-Richtungs- bzw. Zwei-Punkte-Formen wie unter (i)

c) Koordinatengleichungen :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 .$$

Anmerkung : Hierbei sind (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) (bei kanonischem Skalarprodukt) bis auf Normierung die Normalenvektoren von 2 Ebenen, deren Schnitt die Gerade ist. Die Rang-Bedingung bewirkt, dass die Ebenen nicht parallel sind. $(\dim L = 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}) = 1$.

4. Drei-Punkte-Ebenengleichung

a) $E : x = a + (b - a)\lambda + (c - a)\mu$ mit $\lambda, \mu \in K$. S.auch Aufg.W1

b) Punkt-Richtungsgleichung ...

c) = Hessesche Normalform $(\vec{x} - \vec{p}_1)\vec{n}^0 = 0$ (analog zum 2-Dimensionalen)

5. Definition und Beispiele von Vektorräumen

- Definition Vektorraum

s.[Sch] p.1, [F] p. 43

Gegeben sei ein Körper K (als “Skalarbereich”), z.B. \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oder ein endlicher Körper $\text{GF}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$, $\text{GF}(p^s)$. Dann heißt (V, \oplus, \cdot_K) ein **K–Vektorraum** (K–VR),

falls (V, \oplus) eine abelsche Gruppe ist und die sogenannte S–Multiplikation¹

$\cdot_K : K \times V \rightarrow V$ mit $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ folgende Rechengesetze (der “Vielfachbildung”) erfüllt: Für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$, $1 = 1_K$ gilt:

- das gemischte Assoziativgesetz $(\lambda \cdot \mu)v = \lambda(\mu v)$
- die gemischten Distributivgesetze $(\lambda + \mu)v = \lambda v \oplus \mu v$ und $\lambda(v \oplus w) = \lambda v \oplus \lambda w$
- und die Gleichung $1v = v$

Beispiele

- K^n
- $K[X]$
Algebra (!) der Polynome mit Koeffizienten aus K
- \mathbb{R} über \mathbb{Q} bzw. \mathbb{R} über \mathbb{R} ,
allgemeiner: Körper über Unterkörper
- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$
VR der stetigen reellwertigen Abbildungen des Intervalls $[a, b]$
- $K^{(m,n)}$
VR der $m \times n$ –Matrizen über K

6. Definition und Beispiele von Unterräumen

s.[Sch] p.4 Z.B.: Für $V = \mathbb{R}^3$ sind die Unterräume von folgender Form:
 $\{o\}, \mathbb{R}a, \mathbb{R}a + \mathbb{R}b, \mathbb{R}^3$.

7. Unterraumkriterium ($U \neq \emptyset, U + U \subseteq U, KU \subseteq U$)

s.[Sch] p.4, auch W3

¹Wegen der Kommutativität der Multiplikation in K kann man auch $v\lambda$ ($:= \lambda v$) schreiben; alternativ kann man auch $\cdot_K : V \times K \rightarrow V$ definieren.

8. Definition affiner Unterraum (Lineare Mannigfaltigkeit)
 $L = p + U_L$ mit $p \in V$ und U_L Unterraum [Sch] 19-21

b) Basis, Dimension

- $LK(T)$, $\langle T \rangle$?
- Definition Lineare Unabhängigkeit (auch bei Vektoren mit Parametern, s.W6), Linearkombination, Erzeugendensystem
s.[Sch] p. 4-6 [F] p.43
- Basis: Definition, Basisexistenzsatz, Basis-Ergänzungssatz), Dimension (Mächtigkeit jeder Basis von V).
s.[Sch] p. 7-8, [F] p.43
- Man zeige, dass jeder n - dimensionale Vektorraum über dem Körper K isomorph (Def.?) zu K^n ist!
s.[Sch]p.10