Aufgabe W4 (Matrixdarstellung, Rang, Elementare Zeilenumformungen)

Seien V und W zwei 4-dimensionale reelle Vektoräume mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ bzw. $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, ferner $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ mit $A = M_C^B(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2,5 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 4+\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie $f(b_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4$.
2. Bringen Sie A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform!
3. Welchen Rang haben f und A (in Abhängigkeit von α)?
4. Für welche α ist f bijektiv?

Lösungsskizze:

1. Die Spalten der Matrix $M_C^B(f)$ sind die Koordinatenvektoren der Bilder der Vektoren von B bezüglich C. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(b_1) &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 2c_4 \\ f(b_2) &= c_1 + 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 \\ f(b_3) &= 2,5c_2 + c_3 + c_4 \\ f(b_4) &= 2c_1 + 5c_2 + 6c_3 + (4+\alpha)c_4. \end{aligned}$$

2. Durch Subtraktion des 2- bzw. 3- bzw. 2-fachen der ersten Zeile von den Zeilen 2 bzw. 3 bzw. 4 sowie der Subtraktion der neuen Zeile 3 von der neuen Zeile 4 erhält man:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} :$$

3. Bei elementaren Zeilenumformungen bleibt der Rang der Matrizen erhalten. Daher kann man den Rang von A auch an A' ablesen. Man sieht:
Ist $\alpha = 0$, so

$$\text{Rang } f = \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3,$$

und ist $\alpha \neq 0$, so

$$\text{Rang } f = \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 4.$$

4. f ist surjektiv und damit bijektiv, wenn Rang $f = \dim_{\mathbb{R}} W = 4$ gilt; daher ist f bijektiv genau für $\alpha \neq 0$.