Aufgabe W2 (Lineare Unabhängigkeit; Projektion auf eine Komponente)

Seien v_1 und v_2 die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, falls existent, alle Vektoren $v_3 \in \mathbb{R}^3$ derart, dass v_3 linear von v_1, v_2 abhängt und $\mathrm{pr}_1(v_3) = 1$ gilt (für die Projektion pr_1 auf die erste Komponente)!

Lösungsskizze

Gesucht sind Elemente $y, z, r, s \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Heuristik: Aus der Bedingung $(*)$ ergibt sich das Lineare Gleichungssystem

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} 2r & -s & = & 1 \\ & s & = & y \\ \frac{3}{2}r & -s & = & z\,. \end{array} \right.$$

Aus $(**)$ ergibt sich $s = y, \quad r = \frac{1}{2}(1+s)$ und $z = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}y$.
Ende der Heuritistik.
(Bei fehlender Prüfung der Umkehrbarkeit der Schritte) unbedingt notwendige
Probe:

$$\frac{1}{2}(1+y) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{pr}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1.$

Damit ist gezeigt, dass genau jeder der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit beliebigem $y \in \mathbb{R}$

und $z = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}y$ die geforderten Bedingungen erfüllt.