Aufgabe W1
(Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, lineare Abbildung)

(i) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 := (1,1,2), \quad v_2 := (1,2,4) \quad \text{und} \quad v_3 := (1,4,t) \quad \text{aus} \quad \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig, für welche nicht?

(ii) Sei $f : V_1 \to V_2$ eine surjektive lineare Abbildung des $K-$Vektorraums V_1 mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ auf den $K-$Vektorraum V_2. Zeigen Sie, dass dann die Vektoren $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ ein Erzeugendensystem von V_2 bilden!

Lösungsskizze:

(i) Aus dem Ansatz

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

erhält man das homogene lineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} \lambda_1 + & \lambda_2 + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + & 2\lambda_2 + & 4\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + & 4\lambda_2 + & t\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

aus dem u.a. (durch Subtraktion des Zweifachen der Zeile 2 von Zeile 3 folgt:

$$(t-8)\lambda_3 = 0.$$

Daher gilt $\lambda_3 = 0$ oder $t = 8$. Im ersten Fall ergibt die Subtraktion der Zeile 1 von Zeile 2, dass $\lambda_2 = 0$ und damit $\lambda_1 = 0$ ist.

Ergebnis: Im Falle $t \neq 8$ sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass im Falle $t = 8$ die gegebenen Vektoren linear abhängig sind, suchen wir eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors (d.h. eine nicht-triviale Lösung des Systems $(*)$). Wegen der Homogenität von $(*)$ wählen wir $\lambda_3 = 1$ und erhalten aus $(*)$ mittels Subtraktion der Zeile 1 von Zeile 2 dann $\lambda_2 = -3$ sowie aus Zeile 1 dann $\lambda_1 = 2$.
Notwendige Probe (!): Umgekehrt ist $(2, -3, 1)$ im Falle $t = 8$ eine Lösung von $(*)$ und

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$$

eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors mittels v_1, v_2, v_3. Daher sind v_1, v_2, v_3 im Fall $t = 8$ linear abhängig.

(ii) Sei w ein beliebiger Vektor aus V_2. Wegen der Surjektivität von f exisitert dann ein Urbild v von w in V_1, also ein v mit $f(v) = w$. Da B Basis von V_1 ist, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i$. Wegen der Linearität von f gilt:

$$w = f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\lambda_i \in < f(b_1), \ldots, f(b_n) > .$$

Daher ist $f(B) = \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ ein Erzeugendensystem von V_2.