Aufgabe W6 (Lineare Abhängigkeit mit Parameter, LGS)

Seien $t \in \mathbb{R}$ und $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$!

Für welche Werte t sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig, für welche linear unabhängig (mit Begründung)!

Lösungsskizze:

Aus der Linearkombination des Nullvektors $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ ergibt sich das LGS

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & & tx_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0. \end{array} \right.$$

Durch Subtraktion der Zeile 1 von Zeile 3 folgt sofort $x_2 = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- 1.Fall: $t \neq 0$
  Aus der 2.Zeile von $(*)$ folgt dann $x_3 = 0$ und dann $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit von v_1, v_2, v_3.

- 2.Fall: $t = 0$
  Eine Antwort-Möglichkeit, wenn man dies sieht:
  In diesem Fall gilt $v_1 = v_3$; damit sind die Vektoren linear abhängig.

  Alternative Möglichkeit: Aus Zeile 1 von $(*)$ ergibt sich $x_1 = -x_3$. Wegen der Homogenität von $(*)$ kann man o.B.d.A. $x_1 = 1$ setzen. Die Probe zeigt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $(*)$ ist und daher $(1, 0, -1)$ für (x_1, x_2, x_3) eingesetzt eine nicht-triviale Linearkombination der Null mit v_1, v_2, v_3 ergibt.

Ergebnis: v_1, v_2, v_3 sind im Falle $t = 0$ linear abhängig, im anderen Fall linear unabhängig.