Aufgabe W5 (affin-lineare Abbildung, Fortsetzungssatz)

Bezeichne $\mathcal{A}$:=AG($\mathbb{R}^2$) die reelle affine Ebene. (Elemente sind alle affinen Unterräume $v + U$ mit $v \in V$ und $U \leq V$ Unterraum von $\mathbb{R}^2$.)

(a) Zeigen Sie, dass jede affin-lineare Abbildung F von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ Geraden von $\mathcal{A}$ auf Geraden oder Punkte abbildet.

(b) Seien $\Delta := (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ zwei Tripel von Ecken zweier nicht-ausgearteter Dreiecke in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass es eine affin-lineare Abbildung F von $\mathcal{A}$ gibt, die Δ auf Δ' abbildet.

Anmerkungen:

1. In der affinen Geometrie sind keine Strecken (Dreiecksseiten)

   definiert. Daher ist nur von Eck-Tripeln die Rede.

2. Eine affin-lineare Abbildung ist definiert als Abbildung F mit $F(x) = f(x)+t$ mit linearer Abbildung f und Translation $T : x \mapsto x+t$ mit $t \in V$.

3. Anschauliches Vorgehen bei (b): Man verschiebt Δ durch eine Translation T so, dass Δ' und das Bild Δ_1 von Δ eine Ecke gemeinsam haben, die man als Nullpunkt wählt. Danach wendet man eine lineare Abbildung an, die gemäß Fortsetzungssatz durch die Bilder zweier "Dreieckseiten" von Δ_1 als Basisvektoren definiert wird.

Lösungsskizze:

(a) Seien $g = a+b\mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ Gerade und F mit $F(v) = f(v)+t$ affin-lineare Abbildung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$. Dann gilt wegen der Linearität von f:

$$F(g) = f(g) + t = f(a + b\mathbb{R}) + t = (f(a) + t) + f(b)\mathbb{R}.$$

Je nachdem, ob b im Kern von f liegt oder nicht, ist $F(g) = f(a) + t$ Punkt oder $F(g) = (f(a) + t) + f(b)\mathbb{R}$ Gerade.

(b) O.b.d.A. wählt man A' als Ursprung. Seien nun a, b, c bzw. $a' = o, b', c'$ die Ortsvektoren von $A, B.C$ bzw. A', B', C'. Durch die Translation T mit Translationsvektor $-a$ werden a auf o, b auf $b_1 := b - a$ und c auf $c_1 := c-a$ abgebildet. Da b_1 und c_1 linear unabhängig sind (das zu Δ gehörende

Dreieck ist nicht-ausgeartet), exisitiert nach dem Fortsetzungssatz eine lineare Abbildung f mit $f(b_1) = b'$ und $f(c_1) = c'$. Es folgt nun mit $F := f \circ T$, dass $F(a) = f(T(a)) = f(o) = o = a'$
$F(b) = f(T(b)) = f(b_1) = b'$ und $F(c) = f(T(c)) = f(c_1) = c'$,
also $F(\Delta) = \Delta'$ gilt, qed.