Modulprüfung zur Algebra/Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrkräfte an der FU
Dozent: V.Schulze Datum: 10.1.2023
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

(i) Es sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Menge und $(G, \circ)$ eine Gruppe.
Man ergänze die folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			e
b	b			
c	c			

Man gebe eine Untergruppe U von $(G, \circ)$ der Ordnung 2 an.
(ii) Gegeben sei die Permutation $\pi := (1, 3, 5) \circ (3, 4, 2)$
aus der symmetrischen Gruppe $(S_5, \circ)$ vom Index 5.
Man stelle π als Produkt elementefremder Zyklen dar.
Man stelle π^{-1} als Produkt von Transpositionen dar.

Aufgabe 2

(i)Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{14}$ sei definiert durch
$f(a) := 7a^2 \pmod{14}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.
Man zeige: f ist relationstreu bezüglich $+$.
Man zeige: f ist ein Ring-Homomorphismus.
(ii) Man bestimme den Kern von f.
Man bestimme das Bild von f.

Aufgabe 3

(i) Man zeige: $58 \pmod{193}$ ist Einheit in $\mathbb{Z}_{193}$.
Man berechne das zu $58 \pmod{193}$ in $\mathbb{Z}_{193}$ multiplikativ inverse Element.
(ii) Es bezeichne φ die Eulersche $\varphi-$ Funktion.
Man zeige : $\varphi(48) = 16$.
Gilt $7^{18} \equiv 1 \pmod{48}$?

Aufgabe 4

(i) Man zeige : $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel.
Gibt es weitere irreduzible Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 2 ?
(ii) Sei α Nullstelle von $x^2 + x + 1$ in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Z}_2$.
Man zeige : $\{1, \alpha\}$ ist Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Z}_2(\alpha) : \mathbb{Z}_2$.
Ist $\mathbb{Z}_2(\alpha) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$?