Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit, Basis, lineare Abbildung, LGS)

(a) In $V := \mathbb{R}^{(4,1)}$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass c_1, c_2, c_3 linear unabhängig sind.

(ii) (2 Punkte) Seien nun

$$c_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls aus V. Begründen Sie kurz(!), warum $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ keine Basis von V ist.

(iii) (2 Punkte) Ergänzen Sie $\{c_1, c_2, c_3\}$ zu einer Basis von V (mit kurzer Begründung)!
Hinweis: Hier dürfen Sie Sätze aus der Vorlesung verwenden.)

(b) Seien V_1 und V_2 zwei $K-$Vektorräume und $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie (ohne Zitat der entsprechenden Sätze):

(i) (2 Punkte) Sind $v_1, v_2, \ldots v_m$ linear abhängige Vektoren aus V_1, so sind auch die Bilder $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_m)$ linear abhängig.

(ii) (2 Punkte) Geben Sie (mit Begründung) ein Beispiel dafür an, dass es linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, \ldots v_m$ aus V_1 geben kann und eine lineare Abbildung f derart, dass $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_m)$ linear abhängig sind. *Anmerkung:* Beachten Sie, dass hier nicht die Mengen, sondern die Familien ($n-$Tupel) (v_i) bzw. $(f(v_i)$ untersucht werden sollen.