Themen und Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz: Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

[F] Formelsammlung

Themenkreis 2: Lineare Abbildungen, Matrixdarstellung

1. Seien V_1, V_2 K-Vektorräume. Definieren Sie, was unter einer linearen Abbildung von V_1 in V_2 zu verstehen ist!

   Antwort: Eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$ heißt **linear** oder **K–Homomorphismus**, falls gilt:

   $$f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$
   $$\text{(für alle } v, w \in V_1, \lambda \in K)$$

2. Beispiele von linearen Abbildungen:
   Mit der Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \in K^{(m,n)}$ ist die Abbildung f_A linear, wobei

   $$f_A : \quad K^n \to K^m \quad \text{definiert ist durch} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad .$$

   Bestimmen Sie die Form von A für $f = f_A$, falls f

   - $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Linearform ist
     $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
   - zentrische Streckung mit Zentrum $\vec{o}$ und Streckungsfaktor λ in $\mathbb{R}^n$
     $A = \lambda I_n$ mit $(n \times n)-$ Einheitsmatrix $I_n = (\delta_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$.
   - Spiegelung an der zweiten Koordinatenachse in $\mathbb{R}^2$ (mit euklidischem Abstand)
     $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - Drehung um $\vec{o}$ um den Winkel α in $\mathbb{R}^2$ (mit euklidischem Abstand)
     $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{-}\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

- Parallelprojektion längs der zweiten Koordinatenachse auf die erste in $\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vgl. mit [Sch] p.10-12.

3. Beschreiben Sie eine minimale Menge von Vektoren, durch deren Bilder eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ schon bestimmt ist, und beweisen Sie den **Fortsetzungssatz**.

   Antwort: Eine Basis von V_1 ist ausreichend. Denn es gilt der Fortsetzungssatz: Ist $B = (b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V_1 und $(w_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren von V_2 mit gleicher Indexmenge, dann gibt es genau eine lineare Abbildung f von V_1 in V_2 mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.
   Beweisidee: $f(\sum \lambda_i b_i) = \sum \lambda_i f(b_i)$
   vgl. [Sch] p.11 und auch W3

4. Geben Sie die **Matrixdarstellung** einer linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen an!

   Antwort: Seien $V_1, V_2 \;\; K-VR'e$ endlicher Dimension und $f : V_1 \to V_2$ linear. Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ geordnete Basis von V_1 und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ geordnete Basis von V_2, so existieren Skalare

   $$\alpha_{ij} \quad \text{mit } f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} c_i \;\; (j = 1, \ldots, n) \; .$$

   Wir definieren $M_C^B(f) := (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}$ als die "Matrix" von f bzgl. B und C; also:

   $$M_C^B(f) = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{array}} & \begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{array}} \end{array} \right)$$

   mit den Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren von B, dargestellt bzgl. C, als Spalten.
   Vgl. mit W2, Teilen von W3 und (in Umkehrung M gegeben) W4!

Anmerkungen: a) Es gilt $M_C(f(x)) = M_C^B(f) \cdot M_B(x)$ für die Koordinatenvektoren $M_B(x)$ bzw. $M_C(y)$ von x bzgl. B bzw. y bzgl. C.

b) Die Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2) \to K^{(m,n)}$ mit $f \mapsto M_C^B(f)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus

5. Geben Sie an, wie sich Eigenschaften von linearen Abbildungen an den darstellenden Matrizen erkennen lassen (z.B. Rang, Bijektivität).
   Antwort: vgl. [Sch] p.13, z.Teil [F] p. 66

6. Was ist unter dem **Kern** einer linearen Abbildung $f : V_1 \to V_2$, was unter dem **Bild** von f zu verstehen? Welche Struktur besitzen Kern f und Bild f ? Wie sehen die vollen Urbilder der Elemente von V_2 aus?
   Antworten (vgl.[Sch] p.14):
   Kern $f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\}$ ist Unterraum von V_1
   Bild $f = \{f(v) \mid v \in V_1\}$ ist Unterraum von V_2.
   Das volle Urbild von $f(v)$ aus Bild f ist v+Kern f.