Wiederholung und Vertiefung zu 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz:Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

[F] Formelsammlung Duden/Cornelsen

[W] W-Aufgabe

Themenkreis 1: a) Vektorraum, Unterraum b) Basis, Dimension

a) Vektorraum, Unterraum

1. Modell für die Zeichenebene, für den Anschauungsraum

   - Welche Modelle?
     $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
   - Geradengleichungen (verschiedene Formen)
     Antworten: $y = mx+b$ und $x = c$ bzw. Punkt-Richtungsgleichung, Zweipunktegleichung, Hessesche Normalform s.u.
   - Ebenengleichungen (verschiedene Formen)
     Antworten: 3-Punkte-Gleichung; Hessesche Normalform, s.u., s.auch [Sch] p.19-22

2. Allgemeiner: Geraden im 2-dimensionalen affinen Raum AG($\mathbb{R}^2$) mit 0-dim Unterräumen als Punkten, 1-dim Unterräumen als Geraden. Definition Inzidenz und Parallelität ?

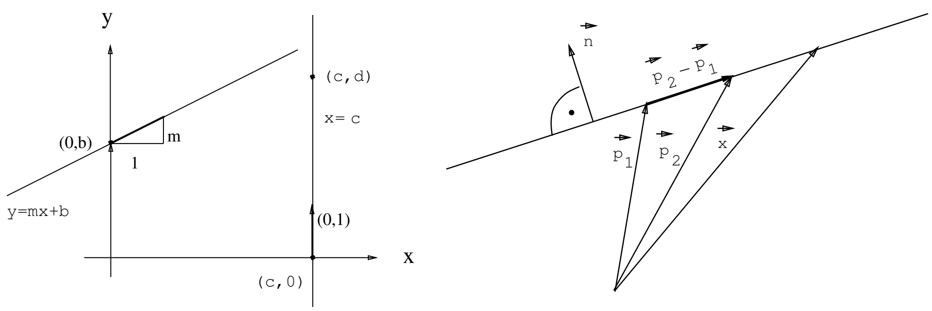
   a) *vektorielle Punkt-Richtungs-Form* (Übung W0 und [F] p.46): $\mathbf{x} = \mathbf{p_0} + t\mathbf{a}$ mit Ortsvektor $\mathbf{x}$ eines beliebigen Punktes der Geraden g, Stützvektor $\mathbf{p_0}$, d.h. Ortsvektor eines Punktes (Aufpunktes) von g, bis auf Vielfache bestimmtem Richtungsvektor $\mathbf{a}$ von g und Skalar t (aus dem Grundkörper K des Vektorraums).

   b) *vektorielle Zwei-Punkte-Form*: $\mathbf{x}=\mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)$ mit verschiedenen Punkten $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ von g und $t \in K$ (s. Abb. 3 b).

   c) *Koordinatengleichung* : $ax + by + c = 0$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$.
   Anmerkung : Setzt man in der vektoriellen Punkt-Richtungsform aus a) $\mathbf{x} = (x, y)$, ferner $\mathbf{a} = (1, m)$ und $\mathbf{p_0} = (0, b)$ bzw. $\mathbf{a} =$

(0, 1) und $\mathbf{p_0} = (c, 0)$, so erhält man als Koordinatengleichung $y = mx + b$ bzw. $x = c$ (s. Abb. 3 a).

d) Hessesche Normalform in $\mathrm{EG}(\mathbb{R}^2)$ (s. Abbildung 3 b und [F] p.46)



a) b)

Abbildung
a) Zur Koordinatengleichung einer Geraden
b) Zur vektoriellen Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{p_1} + t(\vec{p_2} - \vec{p_1}), t \in K$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p_1})\vec{n}^{\,0} = 0$ mit $\vec{n}^{\,0} \perp (\vec{p_2} - \vec{p_1})$ und $\vec{n}^{\,0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, damit $|\vec{n}^{\,0}| = 1$.

3. *Geraden im 3-dimensionalen affinen Raum* :
   a), b) vektorielle Punkt-Richtungs- bzw. Zwei-Punkte-Formen wie unter (i)

   c) *Koordinatengleichungen* :
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{mit}$$
   $$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \ .$$

   Anmerkung : Hierbei sind (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) (bei kanonischem Skalarprodukt) bis auf Normierung die Normalenvektoren von 2 Ebenen, deren Schnitt die Gerade ist. Die Rang-Bedingung bewirkt, dass die Ebenen nicht parallel sind. ($\dim L = 3 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$.

4. Drei-Punkte-Ebenengleichung
   a) $E : x = a + (b - a)\lambda + (c - a)\mu$ mit $\lambda, \mu \in K$. S.auch Aufg.W1

b) Punkt-Richtungsgleichung ...
c)= Hessesche Normalform $(\vec{x}-\vec{p_1})\vec{n}^0 = 0$ (analog zum 2-Dimensionalen)

5. Definition und Beispiele von Vektorräumen

   - Definition Vektorraum
     s.[Sch] p.1, [F] p. 43
     Gegeben sei ein Körper K (als "Skalarbereich"), z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oder ein endlicher Körper $\mathrm{GF}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p, \mathrm{GF}(p^s)$. Dann heißt $(V, \oplus, \underset{K}{\cdot})$ ein **K–Vektorraum** (K–VR),
     falls $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist und die sogenannte S–Multiplikation[1]
     $\underset{K}{\cdot} \;:\; K \times V \to V$ mit $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ folgende Rechengesetze (der "Vielfachbildung") erfüllt: Für alle $v, w \in V,\ \lambda, \mu \in K$, $1 = 1_K$ gilt:

– das gemischte Assoziativgesetz	$(\lambda \cdot \mu)v$	$=$	$\lambda(\mu v)$
– die gemischten Distributivgesetze	$(\lambda + \mu)v$	$=$	$\lambda v \oplus \mu v$ und
	$\lambda(v \oplus w)$	$=$	$\lambda v \oplus \lambda w$
– und die Gleichung	$1v$	$=$	v

   Beispiel-Klassen

   - K^n
   - $K[X]$
     Algebra (!) der Polynome mit Koeffizienten aus K
   - $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$,
     allgemeiner: Köper über Unterkörper
   - $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$
     VR der stetigen reellwertigen Abbildungen des Intervalls $[a, b]$
   - $K^{(m,n)}$
     VR der $m \times n-$Matrizen über K

6. Definition und Beispiele von Unterräumen
   s.[Sch] p.4 Z.B.: Für $V = \mathbb{R}^3$ sind die Unterräume von folgender Form:
   $\{o\}, \mathbb{R}a, \mathbb{R}a + \mathbb{R}b, \mathbb{R}^3$.

[1] Wegen der Kommutativität der Multiplikation in K kann man auch $v\lambda(:= \lambda v)$ schreiben; alternativ kann man auch $\underset{K}{\cdot} \;:\; V \times K \to V$ definieren.

7. Unterraumkriterium ($U \neq \emptyset, U + U \subseteq U, KU \subseteq U$)
   s.[Sch] p.4, auch W3

8. Definition affiner Unterraum (Lineare Mannigfaltigkeit)
   $L = p + U_L$ mit $p \in V$ und U_L (eindeutiger) Unterraum parallel L
Sch
   19-21

b) Basis, Dimension

- Definiion LK(T), $< T >$?

- Definition Lineare Unabhängigkeit (auch bei Vektoren mit Parametern, s.W6), Linearkombination, Erzeugendensystem
  s.[Sch] p. 4-6 [F] p.43

- Basis: Definition, Basisexistenzsatz, Basis-Ergänzungssatz), Dimension (Mächtigkeit jeder Basis von V).
  s.[Sch] p. 7-8, [F] p.43

- Man zeige, dass jeder $n-$ dimensionale Vektorraum über dem Körper K isomorph (Def.?) zu K^n ist!
  s.[Sch]p.10